SKRIPSI

SOLUSI MASALAH NILAI AWAL PDB ORDE EMPAT DENGAN KOEFISIEN KONSTAN MENGGUNAKAN METODE DEKOMPOSISI ADOMIAN

SITTI NURHALIZA

E0121005

PROGRAM STUDI MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS SULAWESI BARAT

TAHUN 2025

SURAT PERNYATAAN

Yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: Sitti Nurhaliza
Tempat/Tgl. Lahir	: Limboro Timur, 03 Maret 2003
NIM	: E0121005
Program Studi	: Matematika

menyatakan bahwa tugas akhir dengan judul "Solusi Masalah Nilai Awal PDB Orde Empat Dengan Koefisien Konstan Menggunakan Metode Dekomposisi Adomian" disusun berdasarkan prosedur ilmiah yang telah melalui pembimbingan dan bukan merupakan plagiat dari karya ilmiah/naskah yang lain. Apabila dikemudian hari terbukti bahwa pernyataan ini tidak benar, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai peraturan yang berlaku.

Majene, 23 Mei 2025

METERAI TEMPEL

10000

12EFDAMX358218284

Sitti Nurhaliza

HALAMAN PENGESAHAN

Skripsi ini diajukan oleh:

Nama	Sitti Nurhaliza
NIM	: E0121005
Judul	: Solusi Masalah Nilai Awal PDB Orde Empat Dengan Koefisien Konstan Menggunakan Metode Dekomposisi Adomian

Telah berhasil dipertahankan di depan Tim Penguji (SK Nomor 70/UN55.7/HK.04/2025, tanggal 26 Mei 2025) dan diterima sebagai bagian persyaratan memperoleh gelar Sarjana Matematika pada Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Sulawesi Barat

Disahkan oleh:

Dekan FMIPA

Universitas Sulawesi Barat

Musafira, S.Si., M.Sc.

NIP 197709112006042002

Tim Penguji:

Ketua Penguji	: Musafira, S.Si., M.Sc.	(........................)
Sekretaris	: Fardinah, S.Si., M.Sc.	(........................)
Pembimbing 1	: Darmawati, S.Si., M.Si.	(........................)
Pembimbing 2	: Muh. Rifandi, S.Si., M.Si.	(........................)
Penguji 1	: Dr. Wahyudin Nur, S.Si., M.Si.	(........................)
Penguji 2	: Hirman Rachman, S.Si., M.Si.	(........................)
Penguji 3	: Andi Seppewali, S.Kom., M.Kom.	(........................)

ABSTRAK

Persamaan diferensial biasa (PDB) orde ke-4 dengan koefisien konstan, secara khusus, sering digunakan untuk memodelkan sistem fisik yang melibatkan interaksi gaya atau perubahan bentuk elastis. Penelitian ini bertujuan untuk menyelesaikan masalah nilai awal pada PDB orde ke-4 dengan koefisien konstan menggunakan metode dekomposisi Adomian (ADM). ADM merupakan salah satu yang telah banyak digunakan dalam menyelesaikan model matematika dalam bentuk persamaan diferensial, baik PDB maupun PDP. Penelitian ini merupakan jenis penelitian kuantitatif karena melibatkan perhitungan numerik untuk menyelesaikan masalah matematika yang spesifik, yaitu PDB. Berdasarkan hasil seluruh simulasi yang dilakukan terhadap empat jenis persamaan diferensial orde-4 baik yang bersifat linear maupun nonlinear, homogen maupun nonhomogen dapat disimpulkan bahwa ADM memberikan pendekatan solusi yang sangat akurat di sekitar titik ekspansi, khususnya pada domain pendek.

Kata kunci: persamaan diferensial biasa, metode dekomposisi Adomian, semi-analitik.

ABSTRACT

Fourth-order ordinary differential equations (ODEs) with constant coefficients, in particular, are often used to model physical systems involving force interaction or elastic deformation. This study aims to solve the initial value problem in fourth-order ODEs with constant coefficients using the Adomian decomposition method (ADM). ADM is one of the methods that has been widely used in solving mathematical models in the form of differential equations, both ODEs and PDEs. This research is a type of quantitative research because it involves numerical calculations to solve specific mathematical problems, namely ODEs. Based on the results of all simulations performed on four types of fourth-order differential equations, both linear and nonlinear, homogeneous and nonhomogeneous, it can be concluded that ADM provides a very accurate solution approach around the expansion point, especially in the short domain.

Keywords: ordinary differential equations, Adomian decomposition method, semi analytic.

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Persamaan Diferensial Biasa (PDB) merupakan salah satu alat penting dalam matematika terapan yang digunakan untuk memodelkan berbagai fenomena alam dan rekayasa, seperti dinamika fluida, osilasi mekanis, dan sistem kelistrikan. Salah satu jenis PDB yang sering dihadapi adalah PDB orde tinggi, yang muncul dalam banyak aplikasi, seperti perhitungan struktur balok elastis, analisis getaran, dan penyelesaian masalah gelombang (Lede & Mungkasi, 2021).

PDB orde ke-4 dengan koefisien konstan, secara khusus, sering digunakan untuk memodelkan sistem fisik yang melibatkan interaksi gaya atau perubahan bentuk elastis, seperti dalam teori balok Euler-Bernoulli. Namun, menyelesaikan masalah nilai awal (*initial value problem*) pada PDB orde tinggi sering kali menjadi tantangan karena kompleksitas solusinya, terutama pada kasus yang melibatkan persamaan nonlinear (Li & Pang, 2020).

Metode analitik tradisional, seperti metode karakteristik atau metode integral, sering tidak dapat memberikan solusi eksplisit untuk persamaan diferensial orde tinggi yang kompleks. Selain itu, metode numerik seperti metode Runge-Kutta atau metode elemen hingga memerlukan diskritisasi dan menghasilkan solusi yang mendekati, namun dengan potensi error numerik yang signifikan. Oleh karena itu, metode semi-analitik, seperti Metode Dekomposisi Adomian atau *Adomian Decomposition Method* (ADM), menjadi solusi yang menjanjikan karena mampu menghasilkan solusi dalam bentuk deret tak hingga (Lu & Zheng, 2021).

ADM dikembangkan untuk menyelesaikan berbagai jenis persamaan diferensial, baik linear maupun nonlinear, tanpa memerlukan linearisasi, transformasi diskrit, atau pendekatan numerik lainnya. Salah satu keunggulan utama ADM adalah kemampuannya untuk menangani masalah nilai awal dengan solusi eksplisit dalam bentuk deret polinomial yang memberikan informasi yang lebih mendetail tentang solusi sebenarnya (Lede & Mungkasi, 2021; Li & Pang, 2020).

Berbagai penelitian sebelumnya telah menunjukkan keberhasilan ADM dalam menyelesaikan berbagai jenis persamaan diferensial. Misalnya, penelitian oleh Lede dan Mungkasi (2021) mengkaji keakuratan ADM dalam menyelesaikan masalah nilai awal yang melibatkan titik singular, dengan hasil yang menunjukkan ADM sangat akurat di sekitar titik awal namun kurang tepat di sekitar titik singular. Penelitian lain oleh Li dan Pang (2020) mendemonstrasikan efektivitas ADM dalam menyelesaikan sistem persamaan diferensial nonlinear. Fathudin (2023) juga mempelajari penerapan ADM pada PDB orde tinggi dengan fokus pada analisis konvergensi solusi, yang menunjukkan bahwa ADM dapat digunakan secara efektif untuk menyelesaikan persamaan dengan koefisien konstan. Selain itu, Lu dan Zheng (2021) membahas penggunaan ADM dalam menyelesaikan persamaan orde tinggi tanpa memerlukan data awal yang lengkap, memberikan fleksibilitas tambahan dalam penerapannya. Temuan-temuan ini menunjukkan bahwa ADM memiliki potensi besar untuk diterapkan pada berbagai model matematis yang kompleks.

Berbeda dengan penelitian sebelumnya yang umumnya memfokuskan pada PDB dengan orde rendah atau pada sistem nonlinear tertentu, penelitian ini secara khusus mengaplikasikan ADM pada PDB orde ke-4 dengan koefisien konstan. Penelitian ini juga menyoroti bagaimana ADM dapat digunakan untuk menghasilkan solusi eksplisit dalam bentuk deret tak hingga, serta mengukur keakuratan dan konvergensi metode ini melalui simulasi numerik. Selain itu, fokus penelitian ini adalah pada perbandingan hasil solusi ADM dengan solusi eksak, untuk memastikan bahwa metode ini tidak hanya efisien, tetapi juga akurat dalam menangani PDB orde tinggi.

Penelitian ini bertujuan untuk menyelesaikan masalah nilai awal pada PDB orde ke-4 dengan koefisien konstan menggunakan ADM. Dengan melakukan simulasi numerik, penelitian ini juga akan menganalisis keakuratan solusi ADM dan membandingkannya dengan solusi eksak, jika tersedia. Hal ini diharapkan dapat memberikan kontribusi dalam pengembangan pendekatan penyelesaian PDB yang lebih efisien, akurat, dan aplikatif untuk berbagai bidang ilmu dan teknologi.

Berdasarkan uraian di atas, pada penelitian ini akan dikaji penggunaan ADM pada kasus Masalah Nilai Awal Persamaan Diferensial Biasa Orde Empat.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan diatas maka rumusan masalah yang akan dibahas dalam skripsi ini adalah sebagai berikut:

1. Bagaimana implementasi metode dekomposisi Adomian dalam penentuan solusi persamaan diferensial biasa orde empat?
2. Bagaimana akurasi metode dekomposisi Adomian dalam penentuan solusi persamaan diferensial biasa orde empat?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah yang telah diuraikan diatas maka tujuan penelitian skripsi ini adalah sebagai berikut:

1. Mengimplementasikan metode dekomposisi Adomian dalam penentuan solusi persamaan diferensial biasa orde empat.
2. Untuk mengetahui akurasi metode dekomposisi Adomian dalam penentuan persamaan diferensial biasa orde empat.

1.4 Batasan Masalah

Batasan masalah dalam penelitian ini yaitu penyelesaian PDB orde empat, baik kasus linear maupun nonlinear, serta mempertimbangkan persamaan homogen dan nonhomogen. Dengan demikian fokus penelitian ini adalah penggunaan ADM dalam konteks tersebut tanpa membahas jenis PDB lainnya.

1.5 Manfaat Penelitian

1. Bagi penulis meningkatkan wawasan dalam menyelesaikan masalah nilai awal PDB linear dan nonlinear orde empat dengan koefisisen konstan menggunakan metode semi-analitik, khususnya ADM.
2. Bagi mahasiswa, sebagai sumber referensi berharga untuk mempelajari metode semi-analitik, khususnya ADM, dan aplikasinya pada persamaan diferensial linear maupun nonlinear.
3. Bagi instansi, memperkaya pustaka penelitian yang dapat dimanfaatkan dosen dan mahasiswa dalam pengembangan materi kuliah atau pembelajaran mandiri terkait ADM.

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Persamaan Diferensial

Persamaan diferensial merupakan persamaan turunan dari suatu fungsi yang didalamnya terdapat variabel bebas dan variabel terikat, baik satu atau lebih variabel. Jika hanya ada satu variabel disebut dengan persamaan diferensial biasa, jika ada lebih dari satu variabel disebut dengan persamaan diferensial parsial (Subandi, 2019).

Dalam penulisan persamaan diferensial, digunakan beberapa jenis notasi turunan, antara lain:

1. Notasi Leibniz

$$\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \cdots, \frac{d^ny}{dx^n}$$

Berturut-turut menyatakan notasi turunan pertama, turunan kedua, turunan ketiga, sampai turunan ke-n dan semua diturunkan terhadap x.

2. Notasi Lagrange

$$f'(x), f''(x), f'''(x), \cdots, f^{(n)}(x)$$

atau

$$y', y'', y''', \cdots, y^{(n)}$$

Berturut-turut menyatakan notasi turunan pertama, turunan kedua, turunan ketiga, sampai turunan ke-n dan semua diturunkan terhadap x.

3. Notasi Euler

$$Df, D^2f, D^3f, \cdots, D^nf$$

Berturut-turut menyatakan notasi turunan pertama, turunan kedua, turunan ketiga, sampai turunan ke-n dan semua diturunkan terhadap x.

4. Notasi Newton

$$\dot{y}, \ddot{y}, \cdots$$

dan seterusnya jumlah titik bergantung pada orde turunannya.

Berdasarkan ordenya, persamaan diferensial dibagi menjadi dua yaitu persamaan diferensial orde satu dan persamaan diferensial berorde tinggi (lebih dari satu). Berdasarkan kelinearannya, persamaan diferensial dibagi menjadi dua yaitu persamaan diferensial linear dan tidak linear (Subandi, 2019).

Definisi 2.1 (Subandi, 2019)

Persamaan diferensial merupakan persamaan turunan dari suatu fungsi yang didalamnya terdapat variabel bebas dan variabel terikat, baik satu atau lebih variabel.

Contoh 2.1 (Munir, 2021)

Persamaan berikut merupakan contoh persamaan diferensial

$$\frac{dy}{dx} = x + y \tag{2.1}$$

$$y' = x^2 + y^2 \tag{2.2}$$

$$2\frac{dy}{dx} + x^2y - y = 0 \tag{2.3}$$

$$y'' + y' \cos x - 3y = \sin 2x \tag{2.4}$$

$$2y''' - 23y' = 1 - y'' \tag{2.5}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6xye^{x+y} \tag{2.6}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 3\sin(x + t) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (1 + x^2)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{2.7}$$

Definisi 2.2 (Munir, 2021)

Persamaan diferensial biasa (*ordinary differential equations*) adalah persamaan diferensial yang hanya mempunyai satu variabel bebas.

Persamaan (2.1) sampai (2.5) di atas merupakan persamaaan diferensial biasa dengan variabel bebasnya adalah x dan variabel terikatnya adalah y.

Definisi 2.3 (Munir, 2021)

Persamaan diferensial parsial (*partial differential equations*) adalah persamaan diferensial yang mempunyai lebih dari satu variabel bebas. Turunan fungsi terhadap setiap variabel bebas dilakukan secara parsial.

Persamaan (2.6) dan (2.7) di atas merupakan persamaan diferensial parsial. Variabel bebas untuk persamaan (2.6) adalah x dan y dan variabel terikatnya adalah u, yang merupakan fungsi dari x dan y, atau ditulis $u = g(x, y)$. Sedangkan variabel bebas untuk persamaan (2.7) adalah x, y, dan t dan variabel terikatnya adalah u, yang merupakan fungsi dari x, y, dan t, atau ditulis $u = g(x, y, t)$.

2.2 Persamaan Diferensial Orde Tinggi

Persamaan diferensial merupakan salah satu cabang utama dalam matematika terapan yang berfungsi untuk memodelkan hubungan antara suatu fungsi dan turunannya. Khususnya, persamaan diferensial orde tinggi adalah persamaan yang melibatkan turunan dari sebuah fungsi hingga orde dua atau lebih. Secara umum, persamaan diferensial orde-n dituliskan dalam bentuk:

$$F\left(x, y, y', y'', \cdots, y^{(n)}\right) = 0$$

di mana $y^{(n)}$menyatakan turunan ke-n dari y terhadap x. Persamaan ini bisa diklasifikasikan berdasarkan beberapa kriteria, yaitu:

a. Berdasarkan linearitas:

- Linear: jika fungsi y dan turunannya muncul dalam bentuk linear tanpa perkalian antar turunan atau fungsi nonlinier dari y.
- Nonlinear: jika terdapat perkalian antar turunan, pangkat fungsi, atau fungsi nonlinier lainnya seperti $\sin(y)$, $\ln(y)$, dan sebagainya.

b. Berdasarkan homogenitas:

- Homogen: jika tidak ada suku nonhomogen (semua suku mengandung y atau turunannya).
- Nonhomogen: jika terdapat suku nonhomogen seperti $\sin(x)$, x^2, atau konstanta di ruas kanan.

Persamaan diferensial orde tinggi banyak dijumpai dalam berbagai disiplin ilmu dan digunakan sebagai model matematis dari fenomena fisis atau teknik. Dalam bidang fisika, persamaan diferensial orde dua dan empat muncul dalam teori osilasi, mekanika klasik, dan teori elektromagnetik. Dalam teknik sipil, persamaan diferensial orde empat digunakan untuk memodelkan defleksi atau lenturan balok elastis dengan beban tertentu (misalnya dalam teori balok Euler-Bernoulli). Dalam bidang teknik mesin dan kelistrikan, sistem getaran dan rangkaian RLC juga menghasilkan persamaan orde tinggi untuk analisis perilaku dinamis sistem.

Di bidang biologi, persamaan diferensial digunakan untuk memodelkan sistem populasi, penyebaran penyakit, dan dinamika enzim. Model-model ini sering kali menghasilkan sistem persamaan diferensial nonlinear dan orde tinggi yang mencerminkan kompleksitas interaksi antar komponen biologis.

Karena luasnya aplikasi dan kompleksitas bentuk dari persamaan diferensial orde tinggi, penyelesaiannya memerlukan metode-metode khusus, baik analitik, semi-analitik, maupun numerik. Salah satu metode semi-analitik yang berkembang dan banyak digunakan untuk menyelesaikan masalah tersebut adalah Metode Dekomposisi Adomian (ADM), yang akan dibahas lebih lanjut dalam subbab berikutnya.

2.3 Persamaan Diferensial Nonlinear

Persamaan diferensial nonlinear merupakan kelas persamaan diferensial yang sangat umum dalam pemodelan sistem fisis, biologis, dan teknik. Berbeda dengan persamaan linear, persamaan diferensial nonlinear mengandung suku-suku yang melibatkan perkalian antar sebuah fungsi atau turunannya, fungsi nonlinier seperti eksponensial, logaritma, trigonometri, atau pangkat lebih dari satu terhadap fungsi y atau turunannya.

Secara umum, persamaan ini sulit diselesaikan secara analitik karena tidak ada prinsip superposisi yang berlaku. Tidak seperti pada kasus linear, jumlah solusi atau bentuk umum solusi dari persamaan nonlinear tidak dapat dibangun dari kombinasi linear solusi parsial. Beberapa ciri utama kesulitan pemecahan persamaan diferensial nonlinear secara analitik adalah:

a. Tidak memiliki solusi eksplisit.
b. Bentuk solusi tergantung pada kondisi awal secara kompleks.
c. Kemungkinan adanya solusi ganda, solusi tak hingga, atau bahkan tidak ada solusi sama sekali.
d. Perilaku solusi bisa menunjukkan bifurkasi, kekacauan (*chaos*), atau singularitas.

Metode klasik yang sering digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial, seperti reduksi orde, pemisahan variabel, atau penggunaan faktor integrasi, cenderung tidak efektif ketika diterapkan pada bentuk nonlinear. Reduksi orde hanya dapat dilakukan pada bentuk tertentu, dan pemisahan variabel terbatas pada persamaan yang memungkinkan pemisahan fungsi y dan x secara eksplisit. Oleh karena itu, pendekatan analitik klasik tidak selalu dapat digunakan secara umum.

Sebagai akibat dari keterbatasan tersebut, peran metode numerik dan semi-analitik menjadi sangat penting. Metode numerik seperti Runge-Kutta, beda hingga, dan elemen hingga banyak digunakan untuk memperoleh solusi pendekatan dengan akurasi tinggi, meskipun memerlukan diskritisasi domain dan perhitungan iteratif. Di sisi lain, metode semi-analitik seperti Metode Dekomposisi Adomian (ADM) memberikan solusi dalam bentuk deret konvergen yang dapat digunakan untuk memahami perilaku lokal solusi tanpa memerlukan diskritisasi numerik.

Dengan menggabungkan keunggulan pendekatan analitik dan numerik, metode semi-analitik seperti ADM menjadi sangat potensial untuk menyelesaikan persamaan diferensial nonlinear, khususnya dalam studi teoritis atau simulasi awal sebelum diterapkan pada model real yang lebih kompleks.

2.4 Solusi Persamaan Diferensial

Persamaan diferensial merupakan salah satu alat penting dalam menganalisis berbagai fenomena dalam sains, teknik, ekonomi, hingga biologi.

Dalam praktiknya, banyak sistem fisik maupun sosial yang dinyatakan dalam bentuk persamaan yang mengaitkan suatu fungsi dengan turunannya. Untuk memahami perilaku dari sistem tersebut, diperlukan solusi dari persamaan diferensial yang bersangkutan.

Berbagai pendekatan telah dikembangkan untuk menyelesaikan persamaan diferensial, baik secara analitik maupun numerik. Sebelum membahas lebih lanjut metode-metode penyelesaian tersebut, terlebih dahulu akan dijelaskan definisi dan konsep dasar mengenai solusi dari persamaan diferensial sebagai landasan teoritis dalam kajian ini. Penjelasan berikut mengacu pada uraian yang dikemukakan oleh (Rifandi & Abdy, 2023).

Definisi 2.4

Solusi persamaan diferensial adalah suatu fungsi yang memuat variabel bebas dan variabel tak-bebas dimana apabila fungsi tersebut dan turunan-turunannya disubstitusi ke dalam persamaan diferensial maka hasilnya akan memenuhi persamaan tersebut.

Definisi 2.5

Solusi eksplisit merupakan solusi persamaan diferensial yang berupa fungsi dimana variabel bebas dan variabel tak-bebas dapat dibedakan dengan jelas.

Contoh 2.4

Buktikan fungsi $f(x) = y = x^2 - 2x - 1$ merupakan solusi dari persamaan diferensial

$$\frac{dy}{dx} = 2(y - x^2 + 3x) \tag{2.8}$$

Jawab:

Karena $y = x^2 - 2x - 1$ berarti $\frac{dy}{dx} = 2x - 2$

Substitusi y dan y' ke persamaan (2.8), diperoleh

$$2x - 2 = 2\big((x^2 - 2x - 1) - x^2 + 3x\big)$$

$$2x - 2 = 2(x^2 - 2x - 1 - x^2 + 3x)$$

$$2x - 2 = 2(x - 1)$$

$$2x - 2 = 2x - 2$$

Karena ruas kanan sama dengan ruas kiri maka terbukti bahwa $y = x^2 - 2x - 1$ adalah solusi persamaan diferensial $\frac{dy}{dx} = 2(y - x^2 + 3x)$.

Contoh 2.5

Buktikan fungsi $f(x) = y = x^2$ merupakan solusi dari persamaan diferensial

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - y - 3x^2 - 8 = 0 \qquad (2.9)$$

Jawab:

Karena $y = x^2$ maka $\frac{dy}{dx} = 2x$ dan $\frac{d^2y}{dx^2} = 2$.

Substitusi y, $\frac{dy}{dx}$, dan $\frac{d^2y}{dx^2}$ ke persamaan (2.9), diperoleh

$$(2)^3 + (2x)^2 - (x^2) - 3x^2 - 8 = 0$$

$$8 + 4x^2 - x^2 - 3x^2 - 8 = 0$$

$$0 = 0$$

Karena ruas kanan sama dengan ruas kiri maka terbukti bahwa $y = x^2$ adalah solusi persamaan diferensial $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - y - 3x^2 - 8 = 0$.

Definisi 2.6

Solusi implisit merupakan solusi persamaan diferensial berupa sebuah fungsi dimana variabel bebas dan variabel tak-bebasnya tidak dapat dibedakan secara jelas. Oleh karena itu, perlu dilakukan penentuan variabel bebas dan tak-bebasnya agar bentuk fungsinya menjadi eksplisit.

Contoh 2.6

Buktikan fungsi $g(x,y) = y^2 + x^2 - 16 = 0$ merupakan solusi dari persamaan diferensial $F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = y\frac{dy}{dx} + x = 0$ pada interval $I(-4 < x < 4)$

Jawab:

Karena $y^2 + x^2 - 16 = 0$ merupakan fungsi implisit, maka berdasarkan fungsi apabila dipilih x sebagai variabel bebas dan y sebagai variabel tak-bebas, maka akan diperoleh fungsi eksplisit. Uraiannya sebagai berikut

$$y^2 + x^2 - 16 = 0$$

$$y^2 = -x^2 + 16$$

$$y^2 = 16 - x^2$$

$$y = \sqrt{16 - x^2}$$

Selanjutnya tentukan turunan $y = \sqrt{16 - x^2}$ terhadap x. Dengan menggunaan aturan rantai dapat dengan mudah diketahui bahwa

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{16 - x^2}}$$

Kemudian substitusi $y = \sqrt{16 - x^2}$ dan $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{16-x^2}}$ ke persamaan $y\frac{dy}{dx} + x = 0$, maka akan diperoleh

$$y\frac{dy}{dx} + x = 0$$

$$\sqrt{16 - x^2}\left(-\frac{x}{\sqrt{16 - x^2}}\right) + x = 0$$

$$-x + x = 0$$

$$0 = 0$$

Karena ruas kanan sama dengan ruas kiri maka terbukti bahwa $y^2 + x^2 - 16 = 0$ adalah solusi implisit persamaan diferensial $y\frac{dy}{dx} + x = 0$ pada interval I.

2.5 Metode Dekomposisi Adomian

2.5.1 Sejarah dan Prinsip Dasar Metode Dekomposisi Adomian (ADM)

Metode Dekomposisi Adomian (*Adomian Decomposition Method* – ADM) diperkenalkan oleh George Adomian pada awal tahun 1980-an sebagai pendekatan semi-analitik untuk menyelesaikan berbagai tipe persamaan diferensial, baik yang bersifat linear maupun nonlinear. Latar belakang munculnya metode ini adalah untuk mengatasi keterbatasan metode numerik klasik yang mengandalkan diskritisasi domain atau linearitas, serta pendekatan transformasi yang sering kali memerlukan kondisi awal atau batas tertentu (Adomian, 1994).

ADM dikembangkan dengan tujuan utama untuk menyederhanakan pemecahan masalah matematis kompleks tanpa perlu melakukan linearisasi atau pendekatan numerik secara eksplisit. Metode ini sangat berguna dalam menyelesaikan PDB, PDP, dan persamaan integral, bahkan yang mengandung komponen nonlinear kuat sekalipun.

Prinsip dasar dari ADM adalah membagi solusi dari suatu persamaan diferensial menjadi deret tak hingga:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x)$$

di mana adalah $y_0(x)$ pendekatan awal terhadap solusi, dan suku-suku berikutnya $y_1(x)$, $y_2(x)$, $\cdots$ dihitung secara rekursif. Dengan memanfaatkan operator diferensial dan inversnya, metode ini menghindari kebutuhan akan iterasi numerik dan menghasilkan solusi dalam bentuk deret yang dapat dihitung secara analitik.

Dalam menangani komponen nonlinear, ADM memperkenalkan konsep polinomial Adomian, yang merupakan ekspansi deret dari fungsi nonlinear $N(y)$ dalam bentuk:

$$N(y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n$$

dimana setiap A_n adalah fungsi yang dibentuk secara sistematis dari suku-suku sebelumnya y_0, y_1, $\cdots$, y_n. Ini memungkinkan penanganan nonlinearitas secara langsung dalam struktur solusi.

Keunggulan utama ADM adalah kesederhanaannya dalam penerapan serta kemampuannya menghasilkan solusi semi-analitik yang akurat pada domain pendek tanpa perlu teknik iteratif atau transformasi kompleks. Oleh karena itu, ADM telah digunakan dalam berbagai bidang, termasuk fisika matematis, teknik mekanika, dinamika fluida, dan biomatematika.

2.5.2 Cara Menyusun Solusi sebagai Deret

Metode Dekomposisi Adomian (ADM) menyusun solusi dari suatu persamaan diferensial sebagai deret tak hingga yang konvergen secara lokal. Tujuannya adalah memperoleh bentuk semi-analitik dari solusi tanpa melakukan diskritisasi atau linearisasi. Proses ini diawali dengan menyatakan solusi $y(x)$ sebagai jumlah dari deret fungsi:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x)$$

Setiap suku $y_n(x)$ disusun secara rekursif berdasarkan struktur dari persamaan diferensial yang ingin diselesaikan. Dalam penerapannya, ADM terlebih dahulu menguraikan persamaan diferensial ke dalam bentuk operator:

$$Ly + Ry + Ny = g(x)$$

dimana L adalah operator linear utama yang memiliki invers, R adalah bagian linear tersisa, N adalah operator nonlinear, dan $g(x)$ adalah suku sumber (jika ada).

Kemudian, dengan menerapkan invers dari operator utama yaitu L^{-1}, persamaan tersebut ditranformasikan menjadi

$$y = L^{-1}(g) - L^{-1}(Ry) - L^{-1}(Ny)$$

Selanjutnya, ADM menyubstitusi bentuk deret $y = \sum_{n=0}^{\infty} y_n$ ke dalam persamaan tersebut dan menyusun sistem rekursif sebagai berikut:

$y_n = L^{-1}(g)$ atau hasil dari syarat awal (jika $g = 0$)

$$y_1 = -L^{-1}(Ry_0) - L^{-1}(A_0)$$

$$y_2 = -L^{-1}(Ry_1) - L^{-1}(A_1)$$

$$\vdots$$

disini, A_n adalah polinomial adomian yang digunakan untuk menangani bagian nonlinear $N(y)$, dan akan dijelaskan secara khusus pada subbab selanjutnya.

Setelah sejumlah suku y_0, y_1, $\cdots$, y_n dihitung, solusi hampiran diperoleh dengan menjumlahkan sebagian deret

$$y(x) \approx \sum_{n=0}^{N} y_n(x)$$

Kelebihan pendekatan ini adalah setiap suku dapat dihitung secara eksplisit tanpa perlu iterasi numerik. Selain itu, pendekatan ini memungkinkan penyisipan syarat awal secara langsung dalam proses penyelesaian, menjadikannya metode yang sangat fleksibel dan efisien, terutama pada domain pendek.

2.5.3 Polinomial Adomian

Salah satu elemen kunci dalam ADM adalah penggunaan polinomial Adomian untuk menangani bagian nonlinear dari suatu persamaan diferensial. Ketika suatu persamaan memuat komponen nonlinear $N(y)$, ADM menyusun ekspansi deret dari komponen tersebut sebagai

$$N(y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n$$

dimana A_n disebut polinomial Adomian yang bergantung pada suku-suku solusi sebelumnya $y_0, y_1, \cdots, y_n$.

Polinomial Adomian dibentuk dengan aturan tertentu, bergantung pada sifat nonlinear dari fungsi $N(y)$. Untuk fungsi nonlinear umum, bentuk umum dari polinomial Adomian diberikan oleh rumus

$$A_n = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{d\lambda^n} N\left(\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k\, y_k\right)\Bigg|_{\lambda=0}$$

Rumus tersebut merepresentasikan derivatif formal dari ekspansi $N(y)$ terhadap parameter pembantu λ, yang kemudian disubstitusi dengan deret $y = \sum \lambda^k y_k$. Dengan cara ini, komponen nonlinear dapat dipecah menjadi bentuk polinomial yang dapat dihitung secara eksplisit untuk setiap suku A_n.

Sebagai contoh, jika $N(y) = y^2$, maka polinomial Adomian yang dihasilkan untuk suku-suku awal adalah

$$A_0 = {y_0}^2$$

$$A_1 = 2y_0y_1$$

$$A_2 = 2y_0y_2 + {y_1}^2$$

$$A_3 = 2y_0y_3 + 2y_1y_2$$

$$\vdots$$

Setiap A_n hanya bergantung pada y_0 hingga y_n, sehingga dapat dihitung secara bertahap seiring dengan pembangunan deret solusi.

Dengan cara ini, ADM tetap dapat digunakan secara efektif untuk menyelesaikan persamaan nonlinear tanpa perlu melakukan pendekatan linear atau iteratif numerik terhadap bagian nonlinear. Penggunaan polinomial Adomian menjadikan ADM sebagai salah satu metode semi-analitik yang paling efisien untuk kelas persamaan diferensial nonlinear.

2.5.4 Kelebihan dan Keterbatasan Metode Dekomposisi Adomian (ADM)

Metode Dekomposisi Adomian (ADM) memiliki sejumlah keunggulan yang menjadikannya pilihan menarik dalam penyelesaian persamaan diferensial, terutama untuk kasus yang melibatkan nonlinearitas dan orde tinggi. Salah satu kelebihan utama ADM adalah kemampuannya menyelesaikan persamaan tanpa memerlukan linearitas, diskritisasi domain, atau iterasi numerik yang kompleks. Hal ini membuat ADM bersifat langsung dan semi-analitik, karena solusi diperoleh dalam bentuk deret fungsi yang secara bertahap mendekati bentuk eksak (Adomian, 1994).

ADM juga sangat fleksibel dalam menangani persamaan nonlinear, baik PDB maupun PDP, serta dapat diterapkan pada berbagai kondisi awal. Karena tidak memerlukan proses linearisasi, ADM dapat mempertahankan struktur asli dari sistem yang dianalisis, yang sangat penting dalam model fisis atau biologis yang sensitif terhadap perubahan struktur.

Kelebihan lainnya adalah ADM memberikan kontrol langsung atas ketelitian solusi melalui jumlah suku dalam deret yang dihitung. Setiap suku dapat dievaluasi secara eksplisit, dan solusi parsial dapat digunakan sebagai aproksimasi hingga derajat akurasi tertentu. Hal ini memungkinkan penggunaan ADM sebagai metode iteratif eksplisit tanpa memerlukan prosedur konvergensi numerik.

Namun demikian, ADM juga memiliki beberapa keterbatasan. Solusi deret yang diperoleh bersifat lokal, umumnya valid di sekitar titik ekspansi (biasanya $x = 0$). Jika solusi diekspansi terlalu jauh dari titik ini, maka konvergensi deret dapat menurun atau bahkan divergen. Oleh karena itu, ADM umumnya efektif hanya untuk domain pendek.

Selain itu, jumlah suku deret yang diperlukan untuk mencapai akurasi tinggi dapat menjadi besar jika persamaan sangat nonlinear atau jika domain analisis diperluas. Dalam kasus seperti itu, metode ini bisa menjadi kurang efisien dibandingkan metode numerik lain yang bekerja lebih baik dalam domain global.

Meskipun memiliki keterbatasan, ADM tetap merupakan metode yang sangat berguna, terutama dalam tahap awal analisis, validasi model, atau saat solusi eksak tidak dapat ditemukan. Dalam banyak aplikasi, ADM digunakan berdampingan dengan metode numerik untuk menghasilkan solusi yang akurat dan efisien.

Metode dekomposisi Adomian merupakan pendekatan yang signifikan dan efektif, yang menyediakan teknik efisien untuk penyelesaian analitik maupun numerik persamaan diferensial, yang memodelkan berbagai aplikasi fisika dalam konteks dunia nyata (Rach, 2008). ADM merupakan salah satu metode yang telah banyak digunakan dalam menyelesaikan model matematika dalam bentuk persamaan diferensial, baik PDB maupun PDP (Fathudin et al., 2023). Pada metode ini, persamaan diferensial ditulis dalam bentuk persamaan operator. Operator yang digunakan merupakan operator diferensial (Sanusi et al., 2020). Metode ini dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan-persamaan diferensial, baik linear maupun nonlinear (Li & Pang, 2020). Metode ini dapat diterapkan meskipun data awal belum diketahui secara pasti (Lu & Zheng, 2021).

2.5.5 Mengkonstruksi dan Mengaplikasikan ADM pada PDB Linear Orde-3

Pada bagian ini akan disajikan cara mengkonstruksi dan mengaplikasikan ADM untuk menyelesaikan masalah nilai awal PDB linear orde-3 yang berbentuk

$$s(x)\frac{d^3y}{dx^3} + p(x)\frac{d^2y}{dx^2} + q(x)\frac{dy}{dx} + r(x)y = g(x)$$

dengan $s(x), p(x), q(x),$ dan $r(x)$ berupa fungsi konstan dengan x sebagai variabel bebas dan dilengkapi dengan nilai awal $y(0) = \alpha; y'(0) = \beta; y''(0) = \mu.$

Tinjau masalah nilai awal berupa PDB linear orde-3 dengan koefisien konstan dalam bentuk umum:

$$a_3\frac{d^3y}{dx^3} + a_2\frac{d^2y}{dx^2} + a_1\frac{dy}{dx} + a_0y = h(x) \tag{2.10}$$

$$y(0) = \alpha; y'(0) = \beta; y''(0) = \mu$$

dimana a_3, a_2, a_1, a_0 adalah konstanta dan $h(x)$ fungsi kontinu pada suatu interval $I \subseteq R$ dan $a_3 \neq 0$ untuk setiap x pada interval I. Berikut adalah langkah-langkah yang dilakukan dalam mengkonstruksi penyelesaian masalah nilai awal pada persamaan (2.10)

Ubah persamaan (2.10) ke dalam bentuk standar

$$\frac{d^3y}{dx^3} + p\frac{d^2y}{dx^2} + q\frac{dy}{dx} + ry = g(x) \tag{2.11}$$

dengan $p = \frac{a_2}{a_3}, q = \frac{a_1}{a_3}, r = \frac{a_0}{a_3}$, dan $g(x) = \frac{h(x)}{a_3}$.

Tinjau persamaan (2.11) dalam bentuk persamaan operator

$$Fy(x) = g(x) \tag{2.12}$$

dimana F merupakan operator diferensial biasa linear. Bagian linear dari F di dekomposisikan menjadi L dan R, dengan $L = \frac{d^3}{dx^3}(\cdot)$ merupakan operator linear yang mempunyai invers $L^{-1} = \int_0^x \int_0^x \int_0^x (\cdot)\, dx\, dx\, dx$ dan R merupakan operator linear lainnya yaitu $p\frac{d^2}{dx^2} + q\frac{d}{dx} + r$.

Dengan demikian persamaan (2.12) dapat ditulis menjadi

$$Ly(x) = g(x) - Ry(x) \tag{2.13}$$

Operasikan invers operator yaitu L^{-1} di kedua ruas persamaan (2.13) sehingga diperoleh

$$L^{-1}Ly(x) = L^{-1}g(x) - L^{-1}Ry(x) \tag{2.14}$$

Substitusikan syarat awal dan dengan menggunakan definisi L^{-1} maka persamaan (2.14) memberikan

$$y(x) = y(0) + xy'(0) + \frac{y''(0)}{2}x^2 + L^{-1}g(x) - L^{-1}Ry(x) \tag{2.15}$$

Misalkan solusi $y(x)$ berbentuk deret $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ sehingga persamaan (2.15) menjadi

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n = y(0) + xy'(0) + \frac{y''(0)}{2}x^2 + L^{-1}g(x) - L^{-1}R\sum_{n=0}^{\infty} y_n \tag{2.16}$$

Proses penyelesaian dengan menyamakan indeks dari kedua ruas persamaan (2.16) memberikan sistem persamaan rekursif sebagai berikut

$$y_n = y(0) + xy'(0) + \frac{y''(0)}{2}x^2 + L^{-1}g(x) \tag{2.17}$$

$$y_n = -L^{-1}Ry_{n-1} \tag{2.18}$$

Berdasarkan solusi dari persamaan rekursif (2.17) dan (2.18) maka hampiran solusi dari masalah nilai awal (2.10) diberikan oleh

$$Y_N(x) = \sum_{n=0}^{N} y_n = y_0 + y_1 + y_2 + \cdots + y_N$$

dengan $\lim_{N\to\infty} Y_N = y(x)$.

2.6 Analisis Galat dan Konvergensi Metode Dekomposisi Adomian (ADM)

2.6.1 Pengaruh Jumlah Suku Terhadap Akurasi

Dalam penerapan Metode Dekomposisi Adomian (ADM), solusi dari suatu persamaan diferensial dinyatakan sebagai deret tak hingga dari suku-suku fungsi yang disusun secara rekursif. Akan tetapi, karena keterbatasan komputasi dan efisiensi, deret tersebut tidak mungkin dihitung secara keseluruhan. Oleh karena itu, solusi biasanya dipotong hingga sejumlah suku tertentu:

$$y(x) \approx y_N(x) \sum_{n=0}^{N} y_n(x)$$

Pemotongan deret ini tentu berdampak langsung pada akurasi hasil. Semakin banyak jumlah suku N yang disertakan, maka solusi mendekati bentuk sebenarnya, yaitu solusi eksak $y(x)$. Pengaruh jumlah suku terhadap akurasi sangat signifikan, terutama ketika solusi memiliki karakteristik nonlinear yang kompleks. Pada banyak studi, seperti yang dilaporkan oleh (Khuri, 2001) dan (Wazwaz, 2005), penggunaan lima hingga tujuh suku pertama sudah cukup untuk mencapai galat yang sangat kecil, biasanya kurang dari 1% pada domain pendek.

Namun demikian, peningkatan jumlah suku tidak selalu menjamin konvergensi secara global. ADM bersifat lokal karena solusinya berupa deret Taylor yang dikembangkan di sekitar titik tertentu (biasanya $x = 0$). Ketika jumlah suku ditambah, akurasi membaik hanya di sekitar titik ekspansi tersebut. Jika domain diperluas secara signifikan, misalnya untuk $x \gg 0$, maka bahkan dengan jumlah suku yang banyak, deret ADM bisa mengalami divergensi. Oleh karena itu, jumlah suku yang digunakan harus dipilih dengan mempertimbangkan ukuran domain dan tujuan analisis.

2.6.2 Galat Absolut dan Galat Relatif

Dalam proses validasi hasil dari ADM, salah satu aspek utama yang harus dianalisis adalah galat antara solusi aproksimasi dan solusi eksak. Terdapat dua jenis galat utama yang digunakan dalam konteks ini, yaitu galat absolut dan galat relatif.

Galat absolut mengukur selisih langsung antara nilai eksak $y(x)$ dan nilai pendekatan $y_N(x)$, dinyatakan sebagai:

$$E_{abs}(x) = |y(x) - y_N(x)|$$

Galat ini berguna untuk mengetahui seberapa besar kesalahan nyata dalam satuan yang sama dengan fungsi yang sedang diselesaikan. Namun, galat absolut tidak selalu cukup untuk memberikan gambaran proporsional. Dalam banyak kasus, digunakan pula galat relatif, yang mengukur seberapa besar galat absolut terhadap nilai eksak:

$$E_{rel}(x) = \left| \frac{y(x) - y_N(x)}{y(x)} \right| \times 100\%$$

Galat relatif memberikan informasi lebih bermakna ketika membandingkan solusi dalam skala yang berbeda atau dalam rentang nilai yang sangat kecil. Dalam studi numerik berbasis ADM, galat relatif biasanya diplot terhadap domain x untuk melihat pada titik mana pendekatan mulai menyimpang secara signifikan dari solusi eksak.

2.7 Hubungan ADM dengan Deret Taylor

Solusi yang dihasilkan oleh ADM memiliki bentuk matematis yang sangat dekat dengan deret Taylor, terutama ketika solusi eksak dari persamaan yang sedang dianalisis memang dapat dinyatakan dalam bentuk deret. Dalam banyak kasus, seperti fungsi logaritma $y(x) = \ln(x+1)$ atau eksponensial $y(x) = e^x$, deret ADM yang diperoleh sejajar dengan deret Taylor dari fungsi tersebut yang dikembangkan di sekitar titik $x = 0$.

Kesamaan ini bukanlah kebetulan. ADM menyusun solusi melalui pendekatan semi-analitik berbasis operator dan inversnya, yang pada praktiknya menghasilkan suku-suku solusi dengan struktur identik terhadap turunan-turunan dari fungsi aslinya. Oleh karena itu, jika solusi eksak diketahui dan memiliki representasi Taylor yang konvergen, maka deret ADM akan cenderung membentuk deret Taylor tersebut secara natural.

Selain itu, dalam situasi di mana solusi eksak tidak tersedia, pengetahuan tentang hubungan ADM dengan deret Taylor memungkinkan peneliti menggunakan sifat konvergensi Taylor sebagai dasar untuk mengevaluasi keandalan hasil ADM. Ini menjadikan ADM tidak hanya sebagai alat komputasi, tetapi juga sebagai alat teoritis dalam analisis model matematis.

2.8 Solusi Eksak dan Deret Taylor

Dalam proses validasi metode semi-analitik seperti ADM, keberadaan solusi eksak dari suatu persamaan diferensial sangat berperan penting. Solusi eksak berfungsi sebagai acuan atau tolak ukur yang memungkinkan dilakukan evaluasi terhadap performa metode pendekatan. Pemilihan solusi eksak yang sesuai menjadi langkah awal yang strategis dalam menguji keakuratan dan efisiensi suatu pendekatan semi-analitik seperti ADM.

Biasanya, solusi eksak yang dipilih merupakan fungsi yang telah dikenal memiliki representasi deret Taylor yang konvergen, seperti fungsi logaritma, eksponensial, trigonometri, atau kombinasi dari fungsi-fungsi tersebut. Misalnya, fungsi $y(x) = \ln(x+1)$, $\sin(x)$, dan e^x sering digunakan sebagai model uji karena memiliki turunan yang sistematik dan ekspansi deret Taylor yang mudah dihitung. Hal ini sangat membantu ketika solusi eksak ingin dibandingkan langsung terhadap hasil ADM yang dibangun dari suku-suku deret serupa.

Sebagai contoh, fungsi logaritma $y(x) = \ln(x + 1)$ dapat diekspansi sebagai deret Taylor di sekitar $x = 0$ menjadi:

$$\ln(x + 1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \cdots$$

Jika persamaan dalam ADM, deret solusi yang diperoleh dari metode tersebut untuk model persamaan diferensial yang melibatkan fungsi ini akan membentuk deret yang hampir identik. Hal ini memudahkan untuk menghitung galat relatif dan membandingkan sejauh mana ADM mampu merekonstruksi struktur fungsi yang sebenarnya.

Demikian pula untuk fungsi $\sin(x)$, ekspansi Taylor-nya di sekitar titik nol adalah:

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$$

Ketika persamaan diferensial mengandung suku nonhomogen berbentuk sinus, maka solusi eksak dari persamaan dapat dinyatakan dalam bentuk deret trigonometri tersebut, dan hasil ADM akan secara alami membentuk deret dengan struktur yang paralel.

Hubungan erat antara solusi eksak dan ekspansi Taylor menjadikan fungsi-fungsi tersebut sangat cocok sebagai *benchmark* atau alat uji validasi dalam studi ADM. Tidak hanya memberikan dasar perbandingan numerik yang kuat, tetapi juga mempermudah interpretasi secara analitik terhadap perilaku solusi dan konvergensi metode.

Dalam penelitian atau pengembangan model matematis baru, pendekatan ini menjadi langkah awal yang penting sebelum metode diterapkan pada model nyata yang lebih kompleks dan belum diketahui solusi eksaknya. Oleh karena itu, pemilihan solusi eksak dengan representasi Taylor yang jelas merupakan strategi krusial dalam pengujian dan validasi Metode Dekomposisi Adomian.

2.9 Penelitian Relevan

Beberapa penelitian terdahulu yang relevan dengan penelitian ini yaitu

1. Keakuratan ADM untuk masalah nilai awal yang penyelesaian eksaknya memuat titik singular yang ditulis oleh Yulius Keremata Lede dan Sudi Mungkasi (2021). Penelitian ini menunjukkan bahwa ADM memiliki keunggulan dalam menghasilkan solusi analitis eksplisit dan kontinu untuk masalah nilai awal. Metode ini memberikan hasil yang akurat di sekitar titik nilai awal, tetapi kurang akurat di sekitar titik singular dan daerah yang jauh dari titik awal, sehingga kurang efektif jika solusi eksak mengandung titik singular.
2. *Application of Adomian decomposition method to nonlinear systems* yang ditulis oleh Wenjin Li dan Yanni Pang (2020). Penelitian ini menunjukkan bahwa ADM merupakan teknik yang efektif untuk menyelesaikan berbagai persamaan nonlinear dengan data awal. ADM dapat diterapkan pada persamaan aljabar, diferensial, integro-diferensial, dan lainnya, dengan solusi hampiran yang dapat disesuaikan dengan tingkat akurasi yang dibutuhkan.
3. Penyelesaian masalah nilai awal PDB linear orde tiga dengan koefisien konstan menggunakan ADM yang ditulis oleh Fathudin, Aang Nurmayan, dan Ahmad Faisol (2023). Penelitian ini menunjukkan bahwa ADM dapat digunakan untuk memperoleh solusi hampiran persamaan diferensial orde tiga dengan koefisien konstan. Melalui dua ilustrasi, metode ini terbukti menghasilkan solusi yang mendekati eksak hingga suku keempat, sehingga dapat menjadi alternatif yang efektif dalam menyelesaikan masalah nilai awal.
4. *Adomian decomposition method for first order PDEs with unprescribed data* yang ditulis oleh Tzon-Tzer Lu dan Wei-Quan Zheng (2020). Berdasarkan penelitian ini, ADM memiliki keunggulan dalam menyelesaikan PDP linear dan nonlinear, baik secara hampiran maupun analitik. Dibandingkan dengan MoC (*Method of Characteristics*), ADM lebih unggul dalam menangani persamaan tanpa solusi eksplisit, meskipun MoC lebih sederhana untuk kasus dengan solusi tertutup. Penelitian ini menunjukkan potensi ADM dalam berbagai aplikasi, termasuk masalah rekayasa di masa depan.

BAB V

PENUTUP

5.1 Kesimpulan

a. Metode dekomposisi Adomian dapat diterapkan secara efektif untuk menyelesaikan PDB orde empat dalam berbagai bentuk, baik linear maupun nonlinear, serta homogen maupun nonhomogen. Setiap bentuk persamaan orde empat tersebut dapat dituliskan dalam bentuk operator, kemudian diselesaikan melalui proses dekomposisi yang menghasilkan solusi dalam bentuk deret tak hingga. Dengan menggunakan syarat awal hingga turunan ketiga, metode ini mampu memberikan bentuk solusi eksplisit tanpa memerlukan linearitas, diskritisasi, atau pendekatan numerik lainnya. Hal ini menunjukkan bahwa ADM fleksibel dan efisien dalam menyelesaikan masalah nilai awal pada persamaan diferensial orde empat.

b. Berdasarkan hasil seluruh simulasi yang dilakukan terhadap empat jenis persamaan diferensial orde empat baik yang bersifat linear maupun nonlinear, homogen maupun nonhomogen dapat disimpulkan bahwa ADM memberikan pendekatan solusi yang sangat akurat di sekitar titik ekspansi, khususnya pada domain pendek. Pada persamaan homogen, baik linear maupun nonlinear, ADM mampu menghasilkan solusi yang hampir identik dengan solusi numerik. Untuk kasus nonhomogen, terutama dengan adanya suku nonhomogen seperti $\sin(x)$, ADM tetap menunjukkan performa yang baik di sekitar $x = 0$, namun akurasinya mulai menurun secara signifikan saat nilai x menjauh dari titik tersebut, terutama pada domain yang lebih luas. Galat relatif meningkat tajam di ujung domain, terutama ketika solusi eksak melibatkan bentuk fungsi lambat tumbuh seperti logaritma. Hal ini menunjukkan bahwa meskipun ADM sangat efisien untuk memperoleh gambaran solusi secara lokal, penerapannya pada domain global memerlukan modifikasi lanjutan seperti penambahan jumlah suku atau metode pembagi domain.

5.2 Saran

Penelitian ini secara khusus membahas penyelesaian masalah nilai awal pada PDB orde 4 dengan koefisien konstan menngunakan ADM. Sebagai bentuk pengembangan penelitian lebih lanjut dan peningkatan nilai kontribusi ilmiah, penelitian selanjutnya disarankan untuk mengembangkan studi ini dengan menerapkan pendekatan serupa pada PDB dengan orde yang lebih tinggi, untuk menguji efektivitas dan keterbatasan ADM terhadap tingkat kompleksitas yang semakin meningkat. Penelitian lanjutan juga dapat diarahkan untuk menggunakan pendekatan numerik lain yang belum dibahas dalam penelitian ini untuk memperoleh hasil yang lebih komprehensif. Dengan demikian, dapat dilakukan perbandingan yang lebih menyeluruh pada solusi yang diperoleh melalui berbagai metode dalam menyelesaikan PDB linear orde tinggi.

DAFTAR PUSTAKA

Adomian, G. (1994). *Solving Frontier Problems of Physics: The Decomposition Method*. Kluwer Academic Publisher.

Fathudin, F., Nuryaman, A., & Faisol, A. (2023). Penyelesaian Masalah Nilai Awal PDB Linier Orde Tiga Dengan Koefisien Konstan Menggunakan Metode Dekomposisi Adomian. *Jurnal Matematika Integratif*, *19*(2), 213. https://doi.org/10.24198/jmi.v19.n2.41896.213-222

Khuri, S. A. (2001). Laplace Decomposition Algorithm Applied to a Class of Nonlinear Differential Equations. *Journal of Applied Mathematics*, *1(4)*, 141–155.

Lede, Y. K., & Mungkasi, S. (2021). Keakuratan Metode Dekomposisi Adomian Untuk Masalah Nilai Awal Yang Penyelesaian Eksaknya Memuat Titik Singular. *Teorema: Teori Dan Riset Matematika*, *6*(2), 130–138. https://doi.org/10.25157/teorema.v6i2.5300

Li, W., & Pang, Y. (2020). Application of Adomian decomposition method to nonlinear systems. *Advances in Difference Equations*, *2020*(1). https://doi.org/10.1186/s13662-020-2529-y

Lu, T. T., & Zheng, W. Q. (2021). Adomian decomposition method for first order PDEs with unprescribed data. *Alexandria Engineering Journal*, *60*(2), 2563–2572. https://doi.org/10.1016/j.aej.2020.12.021

Munir, R. (2021). *Metode Numerik*. Penerbit INFORMATIKA.

Rach, R. C. (2008). A new definition of the Adomian polynomials. *Kybernetes*, *37*(7), 910–955. https://doi.org/10.1108/03684920810884342

Rifandi, M., & Abdy, M. (2023). *Suatu Pengantar Persamaan Diferensial Biasa*. Uwais Inspirasi Indonesia.

Sanusi, W., Side, S., & Fitriani, B. (2020). Solusi Persamaan Transport dengan Menggunakan Metode Dekomposisi Adomian Laplace. *Journal of Mathematics Computations and Statistics*, *2*(2), 173. https://doi.org/10.35580/jmathcos.v2i2.12580

Subandi, A. (2019). *Aljabar dan Kalkulus*. Penerbit Rekayasa Sains.

Wazwaz, A. M. (2005). The Modified Decomposition Method and a Comparison with Adomian's Method. *Applied Mathematics and Computation*, *173(1)*, 165–176.

{Bibliography