

SKRIPSI

**MODEL RANTAI MAKANAN TIGA SPESIES DENGAN
PERLINDUNGAN DAN PEMANENAN SEMUA SPESIES
MENGUNAKAN FUNGSI RESPON BERBEDA**



**MUH. RISWAN KADIR
E0121006**

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS SULAWESI BARAT
TAHUN 2025**

SURAT PERNYATAAN

Yang bertanda tangan tangan dibawah ini:

Nama : Muh. Riswan Kadir
Tempat/Tgl. Lahir : Laliko, 11 September 2003
NIM : E0121006
Program Studi : Matematika (S1)

Menyatakan bahwa tugas akhir dengan judul “Model Rantai Makanan Tiga Spesies dengan Perlindungan dan Pemanenan Semua Spesies Menggunakan Fungsi Respon Berbeda”. Disusun berdasarkan prosedur ilmiah yang telah melalui pembimbing dan bukan merupakan plagiat dari karya ilmiah/naskah lainnya. Apabila dikemudian hari terbukti bahwa pernyataan ini tidak benar, maka bersedia menerima sanksi sesuai peraturan berlaku.

Majene, 01 Oktober 2024



Muh. Riswan Kadir

HALAMAN PENGESAHAN

Skripsi ini diajukan oleh:

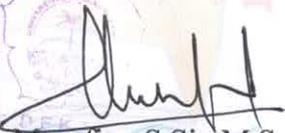
Nama : Muh. Riswan Kadir
NIM : E0121006
Judul : Model Rantai Makanan Tiga Spesies dengan
Perlindungan dan Pemanenan Semua Spesies
Menggunakan Fungsi Respon Berbeda.

Telah berhasil di pertanggung jawabkan di hadapan Tim Penguji (NOMOR :49/UN55.7/HK.04/2025) dan diterima sebagai bagian persyaratan memperoleh gelar Sarjana S1 Matematika pada Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Sulawesi Barat.

Disahkan oleh:

Dekan FMIPA

Universitas Sulawesi Barat



Musafira, S.Si., M.Sc

NIP. 197709112006042002

Tim Penguji:

Ketua Penguji	: Musafira, S.Si., M.Sc.	(.....)
Sekretaris	: Fardinah, S.Si., M.Sc.	(.....)
Pembimbing 1	: Dr. Wahyudin Nur, S.Si., M.Si.	(.....)
Pembimbing 2	: Rahmawati, S.Si., M.Sc.	(.....)
Penguji 1	: Darmawati, S.Si., M.Si.	(.....)
Penguji 2	: Fardinah, S.Si., M.Sc.	(.....)
Penguji 3	: Muh Rifandi, S.Si., M.Si.	(.....)

ABSTRAK

Penelitian ini membahas tentang model rantai makanan tiga spesies dengan perlindungan dan pemanenan semua spesies menggunakan fungsi respon berbeda. Selain itu dilakukan perlindungan dari pemanenan ke semua spesies untuk mengetahui dampak perilaku perlindungan dari pemanen. Penelitian ini mengkaji contoh fenomena interaksi antara tumbuhan rerumputan, rusa dan harimau. Tujuan penelitian ini adalah untuk mengetahui model rantai makanan tiga spesies dengan perlindungan dan pemanenan semua spesies menggunakan fungsi respon berbeda, serta menganalisis titik kesetimbangan model dan interpretasinya. Kestabilan titik kesetimbangan dianalisis menggunakan model linearisasi. Berdasarkan karakteristik nilai eigen yang diperoleh, kriteria Routh-Hurwitz digunakan untuk menentukan kestabilan. Dari hasil analisis diperoleh empat titik kesetimbangan yaitu kepunahan semua spesies (E_0), kepunahan kedua pemangsa (E_1), kepunahan spesies pemangsa puncak (E_2), dan tidak ada spesies yang punah (E_3) dimana semua titik kesetimbangan tersebut eksis bersyarat kecuali (E_0) dan semuanya stabil bersyarat. Untuk mendukung hasil analisis dinamik dilakukan simulasi numerik yang menunjukkan kestabilan titik kesetimbangan E_0 , E_1 , dan E_2 , sebaliknya simulasi kestabilan titik kesetimbangan E_3 , belum berhasil ditemukan karena kompleksitas nilai-nilai parameternya. Simulasi dampak pemanenan di area terlindungi yang menunjukkan hasil, apabila angka pemanenan tinggi populasi kedua spesies pemangsa akan menuju kepunahan. Dampak perlindungan yang dilakukan di area terlindungi menunjukkan hasil, ketika angka perlindungan tinggi populasi mengakibatkan spesies pemangsa lebih tinggi dibandingkan populasi spesies mangsa. Dampak perubahan angka parameter penanganan mangsa menunjukkan populasi mangsa lebih tinggi dibandingkan pemangsa, sementara peningkatan penanganan pemangsa menunjukkan populasi pemangsa lebih tinggi dibandingkan mangsa.

Kata Kunci: Rantai Makanan, Perlindungan, Pemanenan, dan Fungsi Respon

ABSTRACT

This research discusses a three-species food chain model with protection and harvesting of all species using different response functions. In addition, protection from harvesting is applied to all species to determine the impact of protection behaviour from harvesters. This study examines the example of the interaction phenomenon between grass plants, deer and tigers. The purpose of this study is to determine the three-species food chain model with protection and harvesting of all species using different response functions, as well as analysing the equilibrium point of the model and its interpretation. The stability of the equilibrium point was analysed using a linearized model. Based on the characteristics of the eigenvalues obtained, the Routh-Hurwitz criterion is used to determine stability. From the analysis, four equilibrium points are obtained, namely the extinction of all species (E_0), the extinction of both predators (E_1), the extinction of the top predator species (E_2), and no extinct species (E_3) where all equilibrium points are conditionally exist except (E_0) and all are conditionally stable. To support the results of the dynamic analysis, numerical simulations were carried out that showed the stability of equilibrium points E_0 , E_1 , and E_2 , on the other hand, the simulation of the stability of equilibrium point E_3 , has not been found due to the complexity of its parameter values. Simulation of the impact of harvesting in the protected area showed that, if the harvesting rate is high, the populations of both predator species will lead to extinction. The impact of protection in the protected area showed that when the protection rate is high, the population of the predator species is higher than the population of the prey species. The impact of changing the number of prey handling parameters showed higher prey populations than predators, while increasing predator handling showed higher predator populations than prey.

Keywords: *Food Chain, Protection, Harvesting, and Response Function*

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Ekologi merupakan cabang ilmu yang membahas hubungan timbal balik antara makhluk hidup dan lingkungan tempatnya berada. Organisme yang saling berinteraksi dengan lingkungannya, terbentuklah suatu sistem yang dikenal sebagai ekosistem yang mencakup komponen biotik dan abiotik (Shen, 2020). Suatu sistem, di dalam ekosistem berlangsung proses interaksi antara makhluk hidup dengan lingkungannya, antara lain dapat berupa aliran energi, rantai makanan, siklus biogeokimia, perkembangan, dan pengendaliannya (Utomo et al, 2015).

Dalam sebuah ekosistem, interaksi antara spesies mangsa dan predator di suatu rantai makanan dalam lingkungan tertentu yang merupakan interaksi mangsa pemangsa. Dalam bidang matematika interaksi mangsa pemangsa diperkenalkan pertamakali oleh Vito Volterra dan Alfred J. Lotka pada tahun 1920 dan disebut sebagai model Lotka-Volterra (Safitri et al, 2021). Model Lotka-Volterra yang dikembangkan untuk mengetahui laju perkembangan dan kepunahan suatu populasi mangsa yang akan dimakan pemangsa dengan populasi mangsa memiliki makanan yang tersedia setiap saat tetapi pada populasi pemangsa bisa bertahap hidup dengan memakan mangsa (Soleh et al, 2013). Dalam ekosistem hutan hujan tropis terjadi proses rantai makanan yang melibatkan spesies tumbuhan, rusa dan harimau.

Hutan merupakan tipe vegetasi daratan yang didominasi oleh pepohonan. Menurut FAO (Food and Agriculture Organization), kawasan dapat disebut hutan bila pohon-pohon di dalamnya mencapai ketinggian minimal tujuh meter dan menutupi setidaknya 10% lahan. Hutan tropis dengan dua musim utama, hujan dan kemarau memiliki curah hujan tinggi dan sering kali disamakan dengan hutan hujan tropis (Qayim, 2019). Wilayah hutan hujan tropis memiliki keanekaragaman hayati yang sangat tinggi (M, 2022). Deforestasi hutan hujan tropis sangat ekstensif dan permanen menyebabkan hilangnya keanekaragaman hayati, penurunan kualitas dan kuantitas air, udara dan efek rumah kaca (Iskandar et al, 2022). Rusa sambar dan

harimau teridentifikasi memiliki peran penting sebagai spesies payung di hutan tropis sumatera (Ardiantiono et al, 2024).

Rusa sambar (*Rusa unicolor*), salah satu spesies rusa terbesar di kawasan tropis, berperan sebagai mangsa utama harimau Sumatera dalam rantai makanan. Keberadaan rusa ini penting untuk menjaga keberlangsungan predator tersebut (Siboro, 2024). Hutan-hutan tropis yang diolah menjadi lahan pertanian dan perkebunan yang mengganggu keseimbangan ekosistem dan merusak konektivitas antar habitat mengakibatkan populasi harimau (Rahman et al, 2020). Selain karena pengalihan fungsi habitat, deforestasi perburuan menjadi salah satu yang paling berdampak penurunan populasi harimau perburuan harimau Sumatera tidak hanya dilatarbelakangi oleh perlindungan terhadap manusia tetapi seiring berjalannya waktu perburuan menjadi bentuk simbol status sosial (Hutagalung et al, 2024).

Kawasan konservasi seperti taman nasional telah dibentuk untuk menjaga keberlangsungan ekosistem. Meski demikian, perlindungan belum merata di seluruh zona bahkan Kawasan hutan lindung di sekitar taman nasional sama sekali tidak dijangkau untuk dilindungi. Di Taman Nasional Gunung Leuser, misalnya, aktivitas ilegal seperti perburuan masih terjadi, bahkan setelah upaya pelepasliaran harimau dilakukan. Ini menunjukkan bahwa kebijakan konservasi belum sepenuhnya menjamin keamanan spesies terancam punah (Violetta, 2024). Gangguan terhadap spesies kunci seperti rusa dan harimau dapat memicu ketidakseimbangan pada struktur komunitas ekosistem hutan hujan tropis (Ripple et al, 2014).

Model matematika dalam bidang ekologi model rantai makanan merupakan studi tentang keterkaitan makhluk hidup dengan lingkungannya. Pada tahun (Alabacy et al, 2021) mengembangkan efek ketakutan pada model rantai makanan mangsa-pemangsa menggabungkan tempat berlindung dan pemanenan mangsa, dengan fungsi respon II, dan tipe I. Pada tahun (Divya et al, 2024) membahas tentang mangsa, predator, dan pemangsa puncak dengan fungsi respon tipe III untuk interaksi predator dan mangsa, dan fungsi respon crowley-martin yang

mempertimbangkan gangguan di antara predatornya. Penelitian yang dilakukan oleh (Moulay et al, 2019) membahas penggunaan fungsi respon holling tipe III dengan adanya perlindungan pada mangsa.

Dari ketiga penelitian sebelumnya, penulis tertarik untuk mengkaji model rantai makanan tiga spesies dan perlindungan dan pemanenan semua spesies menggunakan fungsi respon berbeda. Dalam hal ini, sumber rerumputan hutan tropis sebagai mangsa, rusa sebagai pemangsa dan harimau menjadi pemangsa puncak. Ada dua fungsi respon yang digunakan yaitu fungsi respon Holling tipe II, dan fungsi respon Holling tipe III.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang dituliskan, disusun rumusan masalah sebagai berikut:

1. Bagaimana model rantai makanan tiga spesies dengan perlindungan dan pemanenan semua spesies menggunakan fungsi respon berbeda?
2. Bagaimana analisis titik kesetimbangan model rantai makanan tiga spesies dan perlindungan dan pemanenan semua spesies menggunakan fungsi respon berbeda?
3. Bagaimana interpretasi dari simulasi numerik model rantai makanan tiga spesies dan perlindungan dan pemanenan semua spesies menggunakan fungsi respon berbeda?

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini sebagai berikut:

1. Untuk mengetahui bagaimana model rantai makanan tiga spesies dan perlindungan dan pemanenan semua spesies menggunakan fungsi respon berbeda.
2. Untuk mengetahui bagaimana analisis titik kesetimbangan model rantai makanan tiga spesies dan perlindungan dan pemanenan semua spesies menggunakan fungsi respon berbeda.
3. Untuk mengetahui bagaimana interpretasi model rantai makanan tiga spesies

dan perlindungan dan pemanenan semua spesies menggunakan fungsi respon berbeda.

1.4 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Penelitian ini menjadi indikator untuk menambah wawasan dalam bidang pemodelan serta penerapannya dalam menyelesaikan masalah di bidang ekologi.
2. Penelitian ini dapat menjadi salah satu sumber pustaka berikutnya mengenai model pemanenan semua spesies pada rantai makanan dengan perlindungan pada mangsa dan pemangsa puncak.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

Pada bab ini akan dibahas tentang pemodelan matematika, persamaan dan sistem diferensial, nilai eigen dan vektor eigen, linearisasi, matriks Jacobian, kriteria Routh-Hurwitz, aturan tanda descartes, analisis kestabilan titik kesetimbangan, model populasi mangsa pemangsa, fungsi respon, model pertumbuhan logistik, model pemanenan, model perlindungan dan penelitian relevan.

2.1 Pemodelan Matematika

Pemodelan matematika merupakan cara untuk merepresentasikan persoalan kompleks ke dalam bentuk matematika. Model matematika merupakan representasi matematika dari masalah yang dimodelkan. Model matematika digambarkan dengan mengasumsikan suatu variabel, parameter, dan bentuk fungsi. Diberikan terhadap pemodelan matematika sebagai berikut.

1. Identifikasi masalah

Dalam mengidentifikasi perlu untuk menentukan tujuan dan pertanyaan yang akan dicari solusinya.

2. Membuat asumsi

Membuat asumsi tentang model yang akan diformulasikan berdasarkan tujuan dari identifikasi masalah.

3. Formulasi model matematika

Model matematika yang diformulasikan harus sesuai dengan asumsi yang telah dibuat. Pada tahapan ini perlu menentukan faktor-faktor yang akan dipertimbangkan dalam model berupa persamaan.

4. Mencari solusi model matematika

Untuk model matematika yang sederhana digunakan solusi yang analitik, sedangkan untuk model yang bersifat kompleks harus melalui simulasi numerik/pendekatan numerik menggunakan program komputer.

5. Interpretasi Hasil

Hasil dari model matematika yang diperoleh perlu diinterpretasikan yang realistis dari sudut pandang bidang matematika yang dibuat.

6. Validasi model

validasi model dilakukan dengan mengecek apakah model yang diformulasikan memberikan hasil yang sesuai dengan kenyataan dengan asumsi-asumsi yang dibuat. Jika data tersedia, selanjutnya dilakukan validasi terhadap data. Jika hasil yang diperoleh.

7. Implementasi

Setelah hasil validasi memenuhi syarat dan rasional maka hasilnya dapat diterima, kemudian dapat dilakukan implementasi dari model yang telah diperoleh.

2.2 Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Nilai eigen digunakan untuk mengetahui kestabilan dari suatu sistem persamaan diferensial. Berikut definisi dari nilai eigen dan vektor eigen.

Definisi 2.2.1 (Yulianti, 2016)

Misalkan A adalah matriks, vektor tak nol \vec{X} didalam \mathbb{R}^n dinamakan vektor eigen (*eigenvector*) dari A jika $A\vec{X}$ adalah kelipatan skalar \vec{X} yaitu $A\vec{X} = \lambda\vec{X}$ untuk suatu skalar λ . Skalar λ dinamakan nilai eigen dari A dari \vec{X} dikatakan vektor eigen yang bersesuaian dengan λ .

Untuk mencari nilai-nilai eigen matriks A yang berukuran $n \times n$, maka dapat dituliskan kembali $A\vec{X} = \lambda\vec{X}$ sebagai

$$\begin{aligned} A\vec{X} &= \lambda\vec{X} \\ A\vec{X} &= \lambda I\vec{X} \\ (\lambda I - A)\vec{X} &= 0 \end{aligned} \tag{2.1}$$

dengan I adalah matriks identitas. Agar λ menjadi nilai eigen, maka haruslah ada solusi tak nol dari persamaan (2.1).

Teorema 2.2.1 (Anton, H., 2010)

Jika A adalah matriks berukuran $n \times n$ dengan entri-entri bilangan real, maka λ adalah nilai eigen dari A jika dan hanya jika memenuhi persamaan

$$|\lambda I - A| = 0 \quad (2.2)$$

yang disebut persamaan karakteristik dari A .

Contoh 2.2.1

Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. Tentukan nilai eigen dan vektor eigen matriks

$A!$

Penyelesaian:

Menentukan nilai eigen dari matriks A

$$|\lambda I - A| = 0$$

$$\left| \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\left| \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\left| \begin{bmatrix} \lambda - 6 & 0 & 0 \\ -3 & \lambda - 3 & 0 \\ -3 & 0 & \lambda - 2 \end{bmatrix} \right| = 0$$

Dengan menggunakan metode sarrus diperoleh:

$$\begin{array}{c} \left| \begin{array}{ccc|cc} \lambda - 6 & 0 & 0 & \lambda - 6 & 0 \\ 3 & \lambda - 3 & 0 & 3 & \lambda - 3 \\ 3 & 0 & \lambda - 2 & 3 & 0 \end{array} \right| = 0 \\ \{(\lambda - 6)(\lambda - 3)(\lambda - 2) + 0 + 0\} - \{0 + 0 + 0\} = 0 \\ (\lambda - 6)(\lambda - 3)(\lambda - 2) = 0 \end{array}$$

Diperoleh nilai eigen dari matriks A yaitu $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 2$.

Selanjutnya menentukan vektor eigen

Untuk $\lambda_1 = 6$, maka

$$(\lambda I - A)\vec{X} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 6-6 & 0 & 0 \\ -3 & 6-3 & 0 \\ -3 & 0 & 6-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

Akibatnya,

$$\begin{aligned} -3x_1 + 3x_2 &= 0 \\ x_1 &= x_2 \\ -3x_1 + 4x_3 &= 0 \\ -3x_2 + 4x_3 &= 0 \\ 4x_3 &= 3x_2 \\ x_3 &= \frac{3}{4}x_2 \end{aligned}$$

Misalkan $x_2 = t$

Sehingga, diperoleh salah satu vektor eigen sebagai berikut:

$$\vec{k}_1 = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ t \\ \frac{3}{4}t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{3}{4} \end{bmatrix} t, t \in \mathbb{R} \right\}$$

Jadi untuk nilai eigen $\lambda_1 = 6$, maka salah satu vektor eigennya adalah $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{3}{4} \end{bmatrix}$.

untuk nilai eigen $\lambda_2 = 3$, maka

$$\begin{bmatrix} 3-6 & 0 & 0 \\ -3 & 3-3 & 0 \\ -3 & 0 & 3-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

Akibatnya

$$\begin{aligned} -3x_1 &= 0 \\ -3x_1 &= 0 \\ -3x_1 - x_3 &= 0 \\ -x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Misalkan $x_2 = t$

Sehingga, diperoleh salah satu vektor eigen sebagai berikut:

$$\vec{k}_1 = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} t, t \in \mathbb{R} \right\}$$

Jadi untuk nilai eigen $\lambda_2 = 3$, maka salah satu vektor eigennya adalah $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

untuk nilai eigen $\lambda_3 = 2$, maka

$$\begin{bmatrix} 2-6 & 0 & 0 \\ -3 & 2-3 & 0 \\ -3 & 0 & 2-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

Akibatnya

$$\begin{aligned} -4x_1 &= 0 \\ -3x_1 - x_2 &= 0 \\ -3x_1 &= x_2 \\ x_1 &= -\frac{1}{3}x_2 \\ 3x_1 &= 0 \end{aligned}$$

Misalkan $x_3 = t$

Sehingga, diperoleh salah satu vektor eigen sebagai berikut:

$$\vec{k}_1 = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} t, t \in \mathbb{R} \right\}$$

Jadi untuk nilai eigen $\lambda_3 = 2$, maka salah satu vektor eigennya adalah $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

2.3 Persamaan Diferensial

Adapun definisi dari persamaan diferensial yaitu sebagai berikut:

Definisi 2.2.1 (Syamsuddin, T, 2013)

Persamaan diferensial adalah persamaan yang melibatkan turunan satu atau lebih variabel tak bebas terhadap satu atau lebih variabel bebas.

Berdasarkan banyaknya variabel tak bebas yang terlibat, persamaan diferensial diklasifikasikan menjadi dua, yaitu persamaan diferensial biasa dan persamaan diferensial parsial.

Definisi 2.2.2 (Syamsuddin, T, 2013)

Persamaan diferensial biasa adalah suatu persamaan diferensial yang melibatkan turunan dari satu atau lebih variabel tak bebas terhadap suatu variabel bebas.

Berdasarkan sifat kelinearannya, persamaan diferensial biasa dibedakan menjadi persamaan diferensial biasa linear dan nonlinear.

Adapun bentuk umum persamaan diferensial biasa yaitu linear yaitu:

$$a_n(t) \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1}(t) \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_2(t) \frac{d^2 x}{dt^2} + a_1(t) \frac{dx}{dt} + a_0(t)x = f(t) \quad (2.3)$$

Dengan $a_n \neq 0, a_n, a_{n-1}, \dots, a_0$ disebut koefisien persamaan diferensial.

Jika $f(t)$ bernilai nol untuk semua nilai t dalam interval yang ditinjau, maka persamaan ini dikatakan homogen, dan sebaliknya dikatakan non homogen.

Contoh 2.2.1

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x}{t} = 21t^2$$

penyelesaian:

$$a_0(t) = \frac{1}{t} \text{ dan } f(t) = 21t^2$$

faktor integritas:

$$g(t) = \int g^{a_0(t)dt} = e^{\int \frac{1}{t} dt} = e^{\ln(t)} = t$$

kalikan $f(t) = 21t^2$ dengan $g(t) = t$ dan diintegrasikan, sehingga diperoleh

$$g(t)x(t) = \int g(t)f(t)dt = \int t21t^2dt = \int 21t^3dt = \frac{21}{3}t^3 + c = 7t^3 + c$$

Jadi, solusi umumnya adalah

$$tx(t) = 7t^3 + c$$

$$x(t) = \frac{(7t^3 + c)}{t}$$

$$x(t) = 7t^2 + c$$

Definisi 2.3.3 (Saputri, R, 2017)

Persamaan diferensial parsial adalah suatu persamaan diferensial yang melibatkan turunan dari satu atau lebih variabel tak bebas terhadap lebih dari satu variabel bebas.

Definisi 2.3.4 (Evans C. Lawrence, 2022)

Sebuah vektor dengan bentuk $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, dimana setiap komponen α_i adalah sebuah bilangan bulat non-negatif, disebut sebuah multi indeks dengan orde

$$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n.$$

Diberikan sebuah multi indeks α dan fungsi $u: U \rightarrow \mathbb{R}$ dengan $U \subset \mathbb{R}^n$, didefinisikan

$$D^\alpha u(x) := \frac{\partial^{|\alpha|} u(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} = \partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n} u.$$

Jika k adalah sebuah bilangan bulat non-negatif,

$$D^k u(x) := \{D^\alpha u(x) \mid |\alpha| = k\}$$

adalah himpunan semua turunan parsial orde k dari u . Dengan memberikan beberapa urutan pada berbagai turunan parsial, $D^k u$ dapat dipandang sebagai titik di \mathbb{R}^{n^k} , selanjutnya dapat ditulis dengan $\vec{D}^k u$.

Definisi 2.3.5(Evans C.Lawrence C., 2022)

Diberikan fungsi $F : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n^k-1} \times \dots \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times U \rightarrow \mathbb{R}$ dengan $U \subset \mathbb{R}^n$.

Sebuah ekspresi dari bentuk

$$F(\vec{D}^k u(x), \vec{D}^{k-1} u(x), \dots, \vec{D} u(x), u(x), x) = 0 \text{ dengan } x \in U \quad (2.4)$$

disebut persamaan diferensial parsial orde k dengan $k \in \mathbb{Z}^+$.

Contoh 2.3.2

a. Contoh dari persamaan diferensial parsial dengan $u : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, dan

$$\begin{aligned} \vec{D}^1 u(x) &= F\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \frac{\partial u}{\partial x_3}\right) \in \mathbb{R}^3 : \\ F\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \frac{\partial u}{\partial x_3}, u, x_1, x_2, x_3\right) &= \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \frac{\partial u}{\partial x_3} + x_3 = 0 \end{aligned}$$

b. Contoh dari persamaan diferensial parsial dengan $u : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, dan

$$\begin{aligned} \vec{D}^2 u(x) &= F\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1}\right) \in \mathbb{R}^4, \text{ dan} \\ \vec{D}^1 u(x) &= F\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}\right) \in \mathbb{R}^2 : \\ F\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, u, x_1, x_2\right) &= \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + u + x_2 = 0 \end{aligned}$$

Berdasarkan Definisi 2.3.3, maka contoh 2.3.2 (a) dan 2.3.2 (b) merupakan persamaan diferensial parsial karena melibatkan dua variabel bebas.

2.4 Sistem persamaan Diferensial

Secara umum suatu sistem persamaan diferensial orde pertama berdimensi n mempunyai bentuk sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\
\frac{dx_2}{dt} &= f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\
&\vdots \\
\frac{dx_n}{dt} &= f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n)
\end{aligned} \tag{2.5}$$

dengan x_1, x_2, \dots, x_n adalah variabel bebas dan t adalah variabel terikat, sehingga $x_1 = x_1(t), x_2 = x_2(t), \dots, x_n = x_n(t)$, dimana $\frac{dx_n}{dt}$ merupakan derivatif fungsi x_n terhadap t , dan f_n adalah fungsi yang bergantung pada variabel x_1, x_2, \dots, x_n dan t (Kaya, K., et al, 2021).

Sistem persamaan diferensial berdimensi n adalah gabungan dari n buah persamaan diferensial dengan n buah fungsi tak diketahui. Dalam hal ini, n merupakan bilangan bulat positif lebih besar sama dengan dua. Sistem persamaan diferensial juga dibedakan menjadi sistem persamaan diferensial linear dan sistem persamaan diferensial tak linear (Julia, I, 2015).

2.4.1 Sistem Persamaan Diferensial Linear

Secara umum suatu sistem persamaan diferensial linear sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2, \dots, a_{1n}(t)x_n + f_1(t) \\
\frac{dx_2}{dt} &= a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2, \dots, a_{2n}(t)x_n + f_2(t) \\
&\vdots \\
\frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2, \dots, a_{nn}(t)x_n + f_n(t)
\end{aligned} \tag{2.6}$$

dengan $x_1 = \alpha_1(t), x_2 = \alpha_2(t), \dots, x_n = \alpha_n(t)$.

Sistem persamaan diferensial linear berdimensi dua, berbentuk:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + f_1(t) \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + f_2(t)\end{aligned}\tag{2.7}$$

dimana fungsi f_1 dan f_2 merupakan fungsi t yang kontinu pada suatu selang I , sedangkan x_1 dan x_2 adalah fungsi t yang tak diketahui (Julia, I, 2015).

Contoh 2.4.1

Tentukan solusi sistem persamaan diferensial linear berikut!

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= 6x_1 \\ \frac{dx_2}{dt} &= 3x_1 + 3x_2 \\ \frac{dx_3}{dt} &= 3x_1 + 2x_3\end{aligned}\tag{2.8}$$

Penyelesaian:

Nyatakan sistem (2.8) dalam bentuk notasi matriks dan vektor, yaitu

$$\frac{d\vec{X}}{dt} = A\vec{X}$$

dengan $A = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ dan $\vec{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

Berdasarkan contoh 2.2.1 diperoleh nilai eigen matriks A dan vektor eigen yang bersesuaian dengan masing-masing nilai eigen sebagai berikut:

untuk nilai eigen $\lambda_1 = 6$, maka salah satu vektor eigennya adalah $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{3}{4} \end{bmatrix}$

untuk nilai eigen $\lambda_2 = 3$, maka salah satu vektor eigennya adalah $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

untuk nilai eigen $\lambda_3 = 2$, maka salah satu vektor eigennya adalah $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

maka diperoleh solusi sistem (2.8) sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \vec{X} &= c_1 \vec{k}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \vec{k}_2 e^{\lambda_2 t} + c_3 \vec{k}_3 e^{\lambda_3 t} \\ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} &= c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{3}{4} \end{bmatrix} e^{6t} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{3t} + c_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t} \end{aligned}$$

Dengan c_1, c_2 , dan c_3 adalah konstanta.

2.4.2 Sistem Persamaan Diferensial Nonlinear

Bentuk umum sistem persamaan diferensial otonomus adalah

$$\frac{d\vec{X}}{dt} = \vec{f}(\vec{X}) \quad (2.9)$$

dengan $f : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ dengan $E \subset \mathbb{R}^n$ (Perko, L, 2001).

Persamaan diferensial dikatakan nonlinear jika persamaan diferensial tersebut memenuhi paling sedikit satu dari tiga kriteria berikut:

- Memuat variabel tak bebas dari turunan-turunan yang berpangkat selain satu.
- Terdapat perkalian dari variabel tak bebas dan atau turunan-turunannya.
- Terdapat fungsi transendental dari variabel tak bebas dan turunan-turunannya.

Contoh 2.4.2

- $\frac{d^3 x}{dt^3} + 11 \left(\frac{dx}{dt} \right)^9 + 3x = 0$

Contoh (1) di atas merupakan persamaan diferensial nonlinear, dimana terdapat variabel bebas yang berpangkat tiga $\frac{d^3x}{dt^2}$ dan turunannya yang berpangkat

Sembilan $\left(\frac{dx}{dt}\right)^9$.

$$2. \quad 11x \frac{dx}{dt} + 9t + 3 = 0$$

Contoh (2) di atas merupakan persamaan diferensial nonlinear, karena terdapat perkalian variabel bebas dan turunannya $\left(11x \frac{dx}{dt}\right)$.

$$3. \quad \frac{dx}{dt} + 9t + 3 = e^t$$

Contoh di atas merupakan persamaan diferensial nonlinear, karena terdapat fungsi transenden e^t .

Dikatakan sistem persamaan diferensial nonlinear, jika persamaan diferensial yang bentuknya merupakan persamaan diferensial nonlinear (Jusrawati, 2018)

Contoh 2.4.3

Diberikan sistem persamaan sebagai berikut:

$$\frac{d\vec{X}}{dt} = \begin{bmatrix} x_1 - x_2^2 \\ x_2 - x_1 x_2^2 \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

Sistem persamaan pada (2.10) merupakan sistem persamaan diferensial nonlinear.

2.5 Linearisasi

Linearisasi adalah proses mengubah sistem persamaan diferensial nonlinear menjadi sistem persamaan diferensial linear. Linearisasi suatu sistem persamaan diferensial nonlinear dilakukan untuk mengetahui perilaku sistem di sekitar titik kesetimbangan sistem tersebut. Adapun syarat linearisasi adalah bahwa real akar karakteristik tidak nol. Linearisasi dapat dilakukan dengan menggunakan matriks Jacobian (Ni'mah., & Savitri., 2022).

Definisi 2.5.1 (Olsder, J.G & Woude Der Van, W. J., 2005)

Vektor $\vec{X}^* \in \mathbb{R}^n$ disebut titik kesetimbangan (*equilibrium point*) dari $\frac{d\vec{X}}{dt} = \vec{f}(\vec{X})$ jika memenuhi $\vec{f}(\vec{X}^*) = \vec{0}$.

Definisi 2.5.2 (Olsder, J.G & Woude Der Van, W. J., 2005)

- (i) Titik kesetimbangan \vec{X}^* dikatakan stabil jika untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $\delta(\varepsilon) > 0$, sedemikian sehingga jika $\|\vec{X}_0 - \vec{X}^*\| < \delta$, maka $\|\vec{X}(t, \vec{X}_0) - \vec{X}^*\| < \varepsilon$.
- (ii) Titik kesetimbangan \vec{X}^* dikatakan stabil asimtotik jika titik kesetimbangan \vec{X}^* stabil dan terdapat $\delta_1 > 0$ sedemikian sehingga $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\vec{X}(t, \vec{X}_0) - \vec{X}^*\| = 0$ asalkan $\|\vec{X}_0 - \vec{X}^*\| < \delta_1$.
- (iii) Titik kesetimbangan dikatakan tidak stabil jika titik kesetimbangan tidak memenuhi poin (i).

Definisi 2.5.3 (Kocak, H, & H. J.K, 1991)

Diberikan $\frac{d\vec{X}}{dt} = \vec{f}(\vec{X})$, $\vec{X} \in \mathbb{R}^n$ dengan $\vec{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ dengan $\vec{f} \in C(E)$ dan titik $\vec{X}^* \in \mathbb{R}^n$ merupakan titik ekuilibrium dari fungsi $\vec{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$.

Diberikan matrik Jacobian dari \vec{f} di titik \vec{X}^*

$$J(\vec{f}(\vec{X}^*)) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\vec{X}^*) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\vec{X}^*) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\vec{X}^*) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\vec{X}^*) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\vec{X}^*) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\vec{X}^*) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\vec{X}^*) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\vec{X}^*) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\vec{X}^*) \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

Matriks pada persamaan (2.11) adalah matriks Jacobian dari fungsi $\vec{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ di titik \vec{X}^* .

Definisi 2.5.4 (Perko,L, 2001)

Diberikan matriks Jacobian $J(\vec{f}(\vec{X}^*))$. Sistem linear

$$\frac{d\vec{Y}}{dt} = J(\vec{f}(\vec{X}^*))\vec{Y}$$

disebut linearisasi sistem nonlinear sistem $\frac{d\vec{X}}{dt} = \vec{f}(\vec{X})$ di sekitar titik \vec{X}^* .

Adapun nilai eigen dari matriks Jacobian (2.11) adalah akar-akar yang diperoleh dari persamaan

$$\left| J(\vec{f}(\vec{X}^*)) - \lambda I \right| = 0 \quad (2.12)$$

dengan I adalah matriks identitas, dan λ adalah akar persamaan (2.12) yang selanjutnya disebut sebagai nilai eigen.

Berikut teorema kriteria kestabilan titik kesetimbangan.

Teorema 2.5.1

Misalkan titik $\vec{X}^* \in \mathbb{R}^n$ adalah titik kesetimbangan $\frac{d\vec{X}}{dt} = \vec{f}(\vec{X})$.

1. Jika bagian real semua nilai eigen $J(\vec{f}(\vec{X}^*))$ negatif, maka titik $\vec{X}^* \in \mathbb{R}^n$ stabil asimtotik.
2. Jika terdapat nilai eigen matriks $J(\vec{f}(\vec{X}^*))$ yang memiliki bagian real positif, maka titik $\vec{X}^* \in \mathbb{R}^n$ tidak stabil.

2.6 Kriteria Routh-Hurwitz

Kriteria Kestabilan Routh-Hurwitz adalah suatu metode yang digunakan untuk menunjukkan kestabilan sistem dengan memperhatikan koefisien dari persamaan karakteristik tanpa menghitung akar-akar secara langsung. Jika persamaan polinomial adalah persamaan karakteristik, maka metode ini dapat digunakan untuk menentukan kestabilan dari suatu sistem. Persamaan polinomial orde ke- n dalam bentuk berikut:

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1} + a_n = 0 \quad (2.13)$$

dimana koefisien-koefisien adalah besaran nyata $a_n \neq 0$.

a) Tabel Routh yang bersesuaian untuk polinomial (2.13) adalah

Tabel 2.6 Routh untuk polinom (2.13)

Variabel	Koefisien					
λ^n	a_0	a_2	a_4	a_6	\dots	a_{n-1}
λ^{n-1}	a_1	a_3	a_5	a_7	\dots	a_n
λ^{n-2}	b_1	b_2	b_3	b_4	\dots	b_n
λ^{n-3}	c_1	c_2	c_3	c_4	\dots	c_n
\vdots	\vdots	\vdots				
λ^2	e_1	e_2				
λ^1	f_1					
λ^0	g_1					

dengan koefisien-koefisien dinyatakan:

$$b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1}, b_2 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1}, \dots, b_n = \frac{a_1 a_{2n} - a_0 a_{2n+1}}{a_1}$$

$$c_1 = \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1}, c_2 = \frac{b_1 a_5 - a_1 b_3}{b_1}, \dots, c_n = \frac{b_1 a_{2n+1} - a_1 b_{n+1}}{b_1}$$

b) Banyaknya akar tak stabil dapat dilihat dari banyaknya perubahan tanda pada kolom pertama Tabel 2.6.

- c) Syarat perlu untuk stabil adalah semua suku pada kolom pertama tabel Routh bertanda sama.

2.7 Aturan Tanda Descartes

Definisi 2.8.1 (Wang, 2004)

Misalkan $P(x) = a_n x^{b_n} + \dots + a_2 x^{b_2} + a_1 x^{b_1} + a_0 x^{b_0}$ adalah polinomial derajat n dengan koefisien real a_i , dan b_i adalah bilangan bulat yang memenuhi $0 \leq b_0 < b_1 < \dots < b_n$.

1. Banyaknya akar-akar positif $P(x)$ sama dengan banyaknya perubahan tanda pada $P(x)$ atau banyaknya variasi tanda dikurangi dengan bilangan genap.
2. Banyaknya akar-akar negatif $P(x)$ sama dengan banyaknya perubahan tanda pada $P(-x)$ atau banyaknya variasi tanda dikurangi dengan bilangan genap.

Jumlah variasi tanda (*the number of variations in sign*) adalah jumlah bergantinya tanda positif (+) dan negatif (-) pada suku-suku yang berurutan pada polinomial.

Contoh 2.4

Tinjau polinomial derajat tiga $P(x) = x^3 - 11x^2 + 15x + 27$. Tunjukkan dengan aturan tanda descartes bahwa polinom tersebut mempunyai akar real positif!

Penyelesaian:

Koefisien polinomial $P(x)$ berturut-turut $a_3 = 1$, $a_2 = -11$, $a_1 = 15$, dan $a_0 = 27$.

$$P(x) = x^3 - 11x^2 + 15x + 27$$

$$\begin{array}{cc} \boxed{} & \boxed{} \\ 1 & 2 \end{array}$$

Variasi tandanya adalah +1, -11 dan -11, +15 artinya diperoleh dua kali pergantian tanda antar koefisiennya. Dengan demikian, berdasarkan aturan tanda descartes polinomial $P(x)$ memiliki dua akar real positif.

$$P(x) = x^3 - 11x^2 + 15x + 27$$

$$(x-9)(x-3)(x+1)$$

akar-akar polinomial $P(x)$ adalah 3,2, dan -1.

2.8 Model Populasi Mangsa Pemangsa

Misalkan didefinisikan $x(t)$ sebagai populasi mangsa pada waktu t dan $y(t)$ sebagai populasi pemangsa pada waktu t . Dalam mengonstruksi model interaksi dari dua spesies, dibuatkan asumsi sebagai berikut:

1. Tidak adanya pemangsa dan mangsa tumbuh dengan laju sebanding dengan populasi saat ini. Sehingga

$$\frac{dx}{dt} = ax, a > 0 \text{ ketika } y = 0$$

2. Tidak adanya mangsa dan pemangsa mati. Sehingga

$$\frac{dy}{dt} = -cy, c > 0 \text{ ketika } x = 0$$

3. Jumlah pertemuan antara mangsa dan pemangsa sebanding dengan produk populasi mereka. Setiap pertemuan tersebut cenderung menghambat pertumbuhan mangsa dan mendorong pertumbuhan pemangsa. Dengan demikian laju pertumbuhan mangsa menurun dengan laju $-\beta xy$, sedangkan tingkat pertumbuhan pemangsa meningkat dengan laju αxy , dimana β dan α adalah konstanta positif.

Sebagai konsekuensi dari asumsi ini, diperoleh sistem persamaan:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - \beta xy \\ \frac{dy}{dt} = -cy + \alpha xy \end{cases} \quad (2.14)$$

Konstanta a , c , β , dan α semuanya bernilai positif. a adalah laju pertumbuhan mangsa dan c adalah laju kematian pemangsa, sedangkan β dan α adalah ukuran dari efek interaksi antara dua spesies. Persamaan (2.12) dikenal sebagai persamaan Lotka-Volterra. Persamaan tersebut dikembangkan dalam makalah Lotka pada tahun 1925 dan oleh Volterra pada tahun 1926 (Boyce, W. E., & DiPrima, R. C., 2008).

2.9 Fungsi Respon

Fungsi respon dalam ekologi diartikan sebagai jumlah makanan yang dikonsumsi oleh pemangsa sebagai fungsi kepadatan makanan (Panja, P., dkk, 2017). Tahun 1953 Holling memperkenalkan fungsi respon yang dikenal sebagai fungsi respon Holling tipe I, tipe II, dan tipe III (Mortoja, S. G., dkk, 2018).

Fungsi respon Holling tipe I terjadi pada jenis pemangsa yang pasif dan lebih memilih menunggu mangsanya. Pada tipe ini ditandai dengan meningkatnya laju konsumsi pemangsa secara linear seiring bertambahnya kepadatan mangsa. Namun akan konstan ketika pemangsa berhenti memangsa. Bentuk fungsi respon Holling tipe I dinyatakan sebagai berikut (Panigoro, H. S, 2014):

$$h(x) = \beta x \quad (2.15)$$

dengan h menunjukkan fungsi respon Holling tipe I dan β sebagai laju penangkapan mangsa oleh pemangsa.

Fungsi respon Holling tipe II terjadi pada pemangsa yang membutuhkan waktu dalam mencari dan mengkonsumsi mangsanya. Sehingga dalam tipe ini penggunaan waktu mulai diperhitungkan dengan sifat pemangsa yang tidak mencari mangsa pengganti ketika mangsa utama punah. Bentuk persamaan fungsi respon Holling tipe II yaitu :

$$h(x) = \frac{\beta x}{1 + \gamma x} \quad (2.16)$$

dengan γ menunjukkan waktu yang dibutuhkan oleh pemangsa dalam mengkonsumsi mangsa.

Tipe III dari fungsi respon Holling merupakan pengembangan dari tipe II, yaitu mulai adanya indikasi bahwa pemangsa mencari mangsa lain di luar mangsa utama ketika kepadatan mangsa utama rendah. Sedangkan waktu yang dibutuhkan oleh pemangsa dalam menangani mangsanya tetap diperhitungkan. Berikut persamaan fungsi respon Holling tipe III yaitu (Ndam, J. N., dkk, 2012):

$$h(x) = \frac{\beta x^2}{1 + \gamma x^2} \quad (2.17)$$

Fungsi respon selain yang dikenalkan oleh Holling, (Mortoja, S. G., dkk, 2018) mengemukakan bahwa *Monod* dan *Haldane* melakukan suatu penelitian terkait fungsi respon yang dikenal sebagai fungsi respon Holling tipe IV. Penelitian ini didasari bahwa interaksi antara mangsa dan pemangsa tidak selamanya monoton, yaitu saat di mana populasi mangsa meningkat maka populasi pemangsa akan menurun, dikarenakan adanya sifat bertahan dari mangsa. Berikut persamaan fungsi respon *Monod* dan *Haldane* (Agarwal Manju & Pathak Rachana, 2012):

$$h(x) = \frac{\beta x}{1 + \gamma x^2} \quad (2.18)$$

2.10 Model Pertumbuhan Logistik

Asumsi yang mengarah pada persamaan diferensial laju pertumbuhan populasi $\left(\frac{dx}{dt}\right)$ adalah berbanding lurus dengan ukuran populasi. Tentu asumsi ini mengabaikan banyak keadaan pertumbuhan populasi yang terjadi sebenarnya.

Untuk mempertimbangkan batasan ini, dibuat asumsi lebih lanjut tentang model populasi:

1. Jika populasi kecil, yaitu ketika $\frac{x}{N}$ mendekati 0, laju pertumbuhannya hampir berbanding lurus dengan ukuran populasi.
2. Jika populasi besar, yaitu ketika $\frac{x}{N} > 1$, maka laju pertumbuhan menjadi negatif.

Persamaan diferensial yang memenuhi asumsi tersebut adalah model pertumbuhan logistik, yaitu

$$\frac{dx}{dt} = ax \left(1 - \frac{x}{N} \right) \quad (2.19)$$

dengan a dan N adalah parameter positif, dimana a adalah laju pertumbuhan populasi ketika x kecil, sedangkan N adalah daya dukung lingkungan (*carrying capacity*). Perhatikan bahwa jika x kecil, maka menjadi seperti persamaan diferensial dasar untuk model sederhana dari pertumbuhan populasi yaitu $\frac{dx}{dt} = ax$ (karena kondisi $1 - \frac{x}{N} \approx 1$), namun jika $x > N$ maka $\frac{dx}{dt} < 0$. Sehingga persamaan (2.17) memenuhi asumsi-asumsi yang diberikan (Hirsch, dkk, 2004).

2.11 Pemanenan

Definisi 2.8. (Anton & Rorres, 2013)

Suatu kebijakan pemanenan pada suatu populasi hewan dipanen secara periodik dikatakan berkesinambungan (*sustainable*) jika hasil dari setiap panen selalu sama dan distribusi umur dari populasi yang masih tersisa setelah setiap panen selalu sama.

Pemanenan (*harvesting*) adalah pengambilan hewan dari populasi tersebut. Pemanenan ini berarti “pemotongan hewan”, tetapi hewan tersebut dapat diambil dari populasi itu untuk keperluan lain.

Ada beberapa strategi pemanenan yaitu:

a. Pemanenan yang merata (*Uniform Harvesting*)

Strategi ini biasanya diterapkan pada populasi liar dengan populasi yang besar seperti ikan, rusa, dan sebagainya. Hewan ini ditangkap secara acak karena akan sukar bagi pemanen untuk membedakan atau menangkap berdasarkan spesifikasi umur.

b. Pemanenan kelompok umur yang termuda (*Harvesting the Youngest Class*)

Strategi ini diterapkan pada populasi yang mudah dalam membedakan atau menangkap berdasarkan spesifikasi umur. Hal ini dapat diterapkan populasi di suatu peternakan.

2.12 Perlindungan

Definisi 2.9 (Anggraeni and Kharis 2021)

Suatu strategi perlindungan dalam dinamika populasi bertujuan untuk menjaga kelangsungan hidup spesies dengan mengurangi risiko kepunahan melalui pengelolaan habitat, pengendalian predator, dan intervensi konservasi lainnya. Perlindungan (protection) dalam ekologi populasi mencakup berbagai tindakan yang dirancang untuk melindungi spesies dari ancaman eksternal yang dapat menyebabkan penurunan populasi atau kepunahan. Beberapa strategi perlindungan yang umum meliputi:

a. Penyediaan Tempat Perlindungan bagi Mangsa (Prey Refuge)

Strategi ini melibatkan penyediaan area atau kondisi di mana spesies mangsa dapat berlindung dari predasi. Keberadaan tempat perlindungan dapat menurunkan tingkat predasi dan membantu stabilitas populasi mangsa. Penelitian oleh (Anggraeni and Kharis 2021) menunjukkan bahwa penyertaan tempat perlindungan bagi mangsa dalam model predator-mangsa dapat mempengaruhi kestabilan dan dinamika populasi secara keseluruhan.

b. Konservasi Habitat

Melindungi dan memulihkan habitat alami merupakan kunci untuk memastikan spesies memiliki lingkungan yang sesuai untuk bertahan hidup dan berkembang biak. Buku (Utami and Budiantoro 2022) membahas berbagai pendekatan dalam konservasi habitat untuk melindungi keanekaragaman hayati di Indonesia.

c. Pengendalian Spesies Invasif

Spesies invasif dapat mengancam spesies lokal melalui kompetisi, predasi, atau penyebaran penyakit. Pengendalian atau eradikasi spesies invasif merupakan langkah penting dalam strategi perlindungan untuk menjaga keseimbangan ekosistem dan kelangsungan hidup spesies asli.

d. Pengelolaan Interaksi Spesies

Memahami dan mengelola interaksi antar spesies, seperti predasi, kompetisi, dan mutualisme, dapat membantu dalam merancang strategi perlindungan yang

efektif. Artikel (JBGroup 2025) menekankan pentingnya interaksi spesies dalam menjaga keseimbangan alam dan keanekaragaman hayati.

2.13 Penelitian Relevan

1. Penelitian yang dilakukan oleh (Alabacy et al, 2021) membahas tentang kestabilan model efek ketakutan pada model predator prey Rantai makanan menggabungkan perlindungan mangsa dan pemanenan. Penelitian tersebut dikaji model pertumbuhan yang disajikan dalam sistem persamaan berikut:

$$\begin{aligned}\frac{dX}{dT} &= \frac{\alpha X}{1 + KY} - bX^2 - \frac{\beta_1(1-m)XY}{a + (1-m)X} \\ \frac{dY}{dT} &= \frac{c_1\beta_1(1-m)XY}{a + (1-m)X} - \beta_2YZ - \gamma_1Y - hY \\ \frac{dZ}{dT} &= c_2\beta_2YZ - \gamma_2Z\end{aligned}\tag{2.20}$$

dengan:

x = populasi mangsa

y = populasi pemangsa pertama

z = populasi pemangsa kedua

α = laju pertumbuhan populasi mangsa

k = tingkat ketakutan mangsa terhadap pemangsa pertama

b = Tingkat kompetisi internal antara individu-individu mangsa

m = Tingkat perlindungan mangsa

β_1 = Tingkat pemangsaan maksimum pemangsa pertama terhadap mangsa

β_2 = Tingkat pemangsaan maksimum pemangsa kedua terhadap pemangsa pertama

c_1 = Efisiensi konversi predator pertama

c_2 = Efisiensi konversi predator kedua

a = Konstanta setengah saturasi pemangsa pertama

γ_1 = Tingkat kematian alami predator pertama

γ_2 = Tingkat kematian alami predator kedua

Persamaan (2.20) populasi mangsa berkurang akibat adanya predasi dari pemangsa pertama sehingga populasi mangsa diberikan perlindungan dari predasi pemangsa pertama yang menggunakan pemangsaan mengikuti fungsi respon

holling tipe II, sedangkan pemanenan dilakukan pada populasi pemangsa pertama untuk menekan ataupun memanfaatkan populasi pemangsa pertama sehingga populasi pemangsa pertama tidak hanya berkurang karena adanya kematian alami pada pemangsa pertama.

2. Penelitian yang dilakukan oleh (Huang et al, 2006) dengan Stability analysis of a prey–predator model with holling type III response function incorporating a prey refuge yang membahas tentang model mangsa pemangsa dengan fungsi respon holling tipe III dengan perlindungan mangsa. Relevansi penelitian adalah pemakaian fungsi respon holling tipe III dan mempertimbangkan adanya perlindungan. Berikut akan disajikan model pertumbuhan yang dibuat peneliti sebagai berikut:

$$\frac{dx}{dt} = ax - bx^2 - \frac{\alpha(1-m)^2 x^2 y}{\beta^2 + (1-m)^2 x^2}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{k\alpha(1-m)^2 x^2 y}{\beta^2 + (1-m)^2 x^2} - cy$$

Dengan:

- x : Populasi mangsa
- y : Populasi pemangsa
- a : Tingkat pertumbuhan intrinsik
- b : Daya dukung mangsa
- c : laju kematian alami mangsa
- k : Tingkat konversi pemangsa
- α : Laju predasi pemangsa
- β : waktu menangani mangsa
- m : Koefisien perlindungan

BAB V PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil penelitian tersebut diperoleh kesimpulan, yaitu:

1. Model rantai makanan tiga spesies dengan perlindungan dan pemanenan semua spesies menggunakan fungsi respon berbeda, sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= rx \left(1 - \frac{x}{k}\right) - \frac{\alpha xy}{a+x} - \mu_x x - h_x x - (1-m_x) h_x x \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{r_y \alpha xy}{a+x} - \frac{\beta y^2 z}{b^2 + y^2} - \mu_y y - h_y y - (1-m_y) h_y y \\ \frac{dz}{dt} &= \frac{r_z \beta y^2 z}{b^2 + y^2} - h_z z - (1-m_z) h_z z - \mu_z z\end{aligned}$$

2. Model rantai makanan tiga spesies menghasilkan 4 titik kesetimbangan yaitu

$E_0 = (0, 0, 0)$ dimana ketiga spesies mengalami kepunahan,

$E_1 = \left(\frac{(r - \mu_x - h_x - \eta_x h_x)k}{r}, 0, 0 \right)$ dimana kedua spesies pemangsa mengalami

kepunahan, $E_2 = (x_2, y_2, 0)$ dimana spesies pemangsa puncak z mengalami

kepunahan dan $E_3 = (x_3, y_3, z_3)$ dimana ketiga spesies hidup berdampingan.

Titik kesetimbangan E_0 tidak eksis bersyarat sedangkan titik kesetimbangan E_1 ,

E_2 dan E_3 eksis bersyarat. Berdasarkan analisis kestabilan diperoleh keempat

titik kesetimbangan stabil bersyarat.

3. Berdasarkan simulasi model yang dilakukan dengan software maple 18 diperoleh bahwa kepunahan ketiga spesies akan terjadi ketika $r - \mu_x - h_x - \eta_x h_x = -0.339$. Kepunahan kedua pemangsa akan terjadi

$$\frac{r}{\mu_x + h_x + (1-m_x)h_x} = 2.083 > 1 \text{ dan } U_{1.1} = -0.052 < 0; U_{1.3} = -0.005 < 0; \text{ dan}$$

$U_{1.4} = -0.006 < 0$. Kepunahan pemangsa puncak z akan terjadi ketika

$$\frac{\alpha r_y}{\mu_y + h_y + h_y(1-m_y)} > 1 \text{ menghasilkan } 1 < 1.055 \text{ dan } \frac{r}{\mu_x + h_x + h_x(1-m_x)} > 1$$

menghasilkan $1 < 11.551$, serta $Q_1 = 0.2556707922$, $Q_2 = 0.002979470116$;
 $Q_3 = 0.000008745337759$, $Q_1 = 0.2556707922 > 0$, $\frac{Q_1 Q_2 + Q_3}{Q_1} = 0.003013675579 > 0$

dan $Q_3 = 0.000008745337759$. Simulasi terhadap dampak pemanenan di area yang dilindungi menunjukkan bahwa ketika tingkat pemanenan cukup tinggi, populasi kedua spesies pemangsa cenderung mengalami penurunan drastis hingga menuju kepunahan, sementara populasi mangsa masih mampu bertahan. Kemudian pada simulasi dampak perlindungan dari pemanenan menunjukkan bahwa semakin tinggi tingkat perlindungan dari pemanenan, baik pada mangsa maupun pemangsa, maka populasi mangsa cenderung menurun, sementara populasi pemangsa meningkat hingga keduanya mencapai titik keseimbangan. Sementara itu, simulasi terhadap pengaruh waktu penanganan menunjukkan bahwa semakin besar angka waktu penanganan terhadap spesies mangsa, maka populasi mangsa akan cenderung lebih tinggi dibandingkan pemangsanya.

5.2 Saran

Tugas akhir ini telah dilakukan analisis dan simulasi model rantai makanan tiga spesies dengan perlindungan dan pemanenan pada semua spesies menggunakan fungsi respon berbeda. Penulis menyarankan apabila pembaca tertarik dengan topik ini agar dapat mengembangkannya lagi model matematika dengan perlindungan dan pemanenan.

DAFTAR PUSTAKA

- Alabacy et al. 2021, The Fear Effect on a Food Chain Prey-Predator Model Incorporating a Prey Refuge and Harvesting, *Journal of Physics: Conference Series* 1804(1). doi: 10.1088/1742-6596/1804/1/012077.
- Anton, H., 2010, *Elementary Algebra* (10th ed), Wiley.
- Anton, H., & Rorres, C., 2013, *Elementary Linear Algebra: Applications Version (11th ed.)*. United States of America: Jhon Wiley & Sons, Inc.
- Anggraeni, T. R., & Kharis, M., 2021, Analisis model predator-prey dengan dinamika populasi rekrutmen-death, perlindungan prey dan fungsi respon Holling tipe III. *UNNES Journal of Mathematics*, 10(2), 56–65.
- Anggraeni et al, 2021, Analisis Model Predator-Prey Dengan Dinamika Populasi Rekrutmen-Death , Perlindungan Prey Dan Fungsi Respon Holling Tipe III, *Unnes Journal of Mathematics* 10(2):2021.
- Ardiantiono et al, 2024, Selecting Umbrella Species as Mammal Biodiversity Indicators in Tropical Forest, *Biological Conservation* 292(March). doi: 10.1016/j.biocon.2024.110511.
- Argawal Manju., & Pathak Rachana, 2012, Harvesting and Hopf Bifurcations in a Prey-Predator Model with Holling Type IV Functional Response, *International Journal of Mathematics and Soft Computing*, 2(1), 83-92.
- Boyce, W. E., & DiPrima, R. C, 2008, *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*, Ninth Edition. John Willey & Sons Inc. New York.
- Divya et al, 2024. “Analysis of Prey, Predator and Top Predator Model Involving Various Functional Responses.” *Baghdad Science Journal*.
- Evan C. Lawrence., 2022, *Persamaan Diferensial Parsial*, Vol .19, Ed.2, American Mathematical Society
- Hirsch, M. W., Smale, S., & Devaney, R. L, (2004), *Differential Equations, Dynamical Systems & An Introduction to Chaos*, Second Edition.
- Huang, Yunjin, Fengde Chen, and Li Zhong., 2006, Stability Analysis of a Prey-Predator Model with Holling Type III Response Function Incorporating a Prey Refuge, *Applied Mathematics and Computation* 182(1):672–83. doi: 10.1016/j.amc.2006.04.030.
- Hutagalung, Albertus, and Gusti Asnan, 2024, Harimau Sumatra (Panthera Tigris Sumatrae): Dari Ekspansi Kolonial Hingga Perburuan Di Sumatra Awal Abad XX, *Jurnal Humanitas: Katalisator Perubahan Dan Inovator Pendidikan* 10(3):539–55.
- Iskandar, Beni, and Nanang Hanafi, 2022, Algoritma Machine Learning Deteksi Deforestasi Hutan Hujan Tropis Di Kabupaten Kotawaringin Barat (Machine

- Learning Algorithm Detection of Tropical Rain Forest Deforestation in Kotawaringin Barat Regency), *Jurnal Teknologi Informasi, Komputer Dan Aplikasinya (JTika)* 4(2):194–201.
- JBGGroup, 2025, *Ekologi Populasi: Memahami Dinamika Dan Faktor Yang Mempengaruhi Kelangsungan Spesies.*”
- Jusrawati., 2018, Pemodelan matematika terhadap kelangsungan hidup penderita diabetes melitus, *Skripsi*, Jurusan Matematika, Universitas Islam Negeri Alauddin Makassar.
- Julia, I., 2015, Analisis kestabilan titik kesetimbangan model matematika proses transmisi virus dengue di dalam tubuh manusia dengan terapi obat herbal, *Skripsi*, Program Studi Matematika, Universitas Negeri Malang.
- Kaya, K., et al., 2021, Model Matematika pada Penyakit Diabetes Melitus dengan Faktor Genetik dan Faktor Sosial, *Journal of Mathematics: Theory and Applications*, Vol. 3, No. 1, :<https://ojs.unsulbar.ac.id/index.php/Mathematics/article/view/1366/731>.
- M., Nana Siktiana. 2022. “Hutan Hujan Tropis: Pengertian, Ciri-Ciri Dan Manfaatnya.” *Lindungi Hutan*.
- Moulay et al, 2019. “Bifurcation Analysis for Prey-Predator Model with Holling Type III Functional Response Incorporating Prey Refuge.” *Applications and Applied Mathematics: An International Journal (AAM)* 14(2):1020–38.
- Mortoja, S. G, 2018, *Dynamics of A Predator-Prey Model with Stage-Structure on Both Species and Anti-Predator Behavior*, Informatics in Medicine, Unlocked. 10, 50-57.
- Ni'mah, F., & Savitri, D., 2022, Analisis kestabilan model eko-epidemiologi dengan fungsi respon holling tipe I, *Jurnal Ilmiah Matematika*, Vol.10. No.1, : <https://www.semanticscholar.org/reader/7bfbdb6d4ed64b26818556520dd8e329a34bd71a>.
- Ndam, J. N., Chollom, J. P., & Kassem, T. G, 2012. *A Mathematical Model of Three-Species Interactions in an Aquatic Habitat*, *ISRN Applied Mathematics*, 1-11.
- Panigoro, H. S, 2014, *Analisis Dinamik Sistem Predator-Prey Model Leslie-Gower dengan Pemanenan Secara Konstan Terhadap Predator*. Euler, 2(1), 1-12.
- Perko, L., 2001, *Sistem Nonlinier: Teori Global. Persamaan Diferensial dan Sistem Dinamis*, Vol. 7, Springer, New York, Amerika Serikat.
- Qayim, Ibnu. 2019. “Hutan Tropis Dan Faktor Lingkungannya.” *Ekologi Hutan Tropis* 1–43.
- Rahman et al, 2020. “Spatial Assessment of Landscape Structure Changes and Ecological Connectivity in Pariaman.” *Journal of Remote Sensing GIS & Technology* 6(2):10–22.

- Ripple, et al., 2014. "Status and Ecological Effects of the World's Largest Carnivores." *Science* 343(6167). doi: 10.1126/science.1241484.
- Safitri, Dwi, Heni Widayani, and Usman Pagalay. 2021. "Analisis Dinamik Model Predator-Prey Dengan Faktor Kanibalisme Pada Predator." *Jurnal Riset Mahasiswa Matematika* 1(2):64–78. doi: 10.18860/jrmm.v1i2.14019.
- Saputri, R., 2017, Solusi Numerik Model Matematika Glukosa, Insulin, dan Sel, *Skripsi*, Jurusan matematika, Universitas Negeri Maulana Malik Ibrahim
- Shen, Gangxu. 2020. "Campbell Biology (Edited by Lisa Urry, Michael Cain, Steven Wasserman, Peter Minorsky and Jane Reece)." *Journal of Biological Research-Thessaloniki* 27(1). doi: 10.1186/s40709-020-00127-0.
- Siboro, Titah Meysa Najelima. 2024. "Tingkat Kesejahteraan Rusa Sambar (Rusa Uicolor) Di Balai Penerapan Standar Instrumen Lingkungan Hidup Dan Kehutanan Aek Nauli Sumatera Utara." Universitas Jambi.
- Soleh, Mohammad, Siti Kholipah, Universitas Islam, Negeri Sultan, and Syarif Kasim. 2013. "Model Matematika Mangsa-Pemangsa." 10(2).
- Syamsuddin, T, 2013, Analisis kestabilan dan keuntungan maksimal pada model Pertumbuhan populasi mangsa-pemangsa Dengan tahapan struktur, *Natural Science dan Mathematics*, : <https://pubmed.ncbi.nlm.gov/29928743>.
- Utami, Inggita, and Agung Budiantoro, 2022, *BIOLOGI KONSERVASI: Strategi Perlindungan Keanekaragaman Hayati Indonesia*.
- Utomo et al, 2015, *Pengertian, Ruang Lingkup Ekologi Dan Ekosistem, Modul 1* 1–31.
- Violetta, prisca triferna, 2024, KLHK Lepasliarkan Harimau Sumatera Di Habitat TN Gunung Leuser." *Antara News*. Retrieved April 22, 2025 (<https://www.antaraneews.com/berita/3975273/klhk-lepasliarkan-harimau-sumatera-di-habitat-tn-gunung-leuser>).
- Wang, X, (2004), A Simple Proof of Descartes's Rule of Sign, *JSTOR*, 111: 525-526.
- Yulianti, S., R. S. R, & B. N. 2016, Analisis penyebaran penyakit diarae sebagai salah satu penyebab kematuian pada balita menggunakan model matematika SIS, *Tesis*, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Yogyakarta.