

SKRIPSI
PELABELAN TOTAL TAK REGULER SISI PADA GRAF
BERLIAN TERHUBUNG, GRAF *TOWER*, GRAF PARABOLA
DAN GRAF *EYEGLASSES*



HESTI AULIA
E0121009

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS SULAWESI BARAT
TAHUN 2025

SURAT PERNYATAAN

Yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama : Hesti Aulia
Tempat/Tgl. Lahir : TL. Keramat, 01 September 2003
NIM : E0121009
Program Studi : Matematika

menyatakan bahwa tugas akhir dengan judul "Pelabelan Total Tak Reguler Sisi pada Graf Berlian Terhubung, Graf *Tower*, Graf Parabola dan Graf *Eyeglasses*" disusun berdasarkan prosedur ilmiah yang telah melalui pembimbingan dan bukan merupakan plagiat dari karya ilmiah/naskah yang lain. Apabila di kemudian hari terbukti bahwa pernyataan ini tidak benar, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai peraturan yang berlaku.

Majene, 15 Mei 2025



Hesti Aulia

HALAMAN PENGESAHAN

Skripsi ini diajukan oleh :

Nama : Hesti Aulia
NIM : E0121009
Judul : Pelabelan Total Tak Reguler Sisi pada Graf Berlian Terhubung,
Graf *Tower*, Graf Parabola dan Graf *Eyeglasses*

Telah berhasil dipertahankan di depan Tim Penguji (SK Nomor : 25/UN55.7/HK.04/2025) dan diterima sebagai bagian persyaratan memperoleh gelar Sarjana Matematika pada Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Sulawesi Barat.

Disahkan oleh:

Dekan FMIPA

Universitas Sulawesi Barat



(Musafira, S.Si., M.Sc)

NIP. 197709112006042002

Tim Penguji:

Ketua Penguji : Musafira, S.Si., M.Sc

Sekretaris : Fardinah, S.Si., M.Sc

Pembimbing 1 : Meryta Febrilian Fatimah, S.Si., M.Sc

Pembimbing 2 : Fardinah, S.Si., M.Sc

Penguji 1 : Hirman Rachman, S.Si., M.Si

Penguji 2 : Muh. Rifandi S.Si., M.Si

Penguji 3 : Darmawati S.Si., M.Si

(.....)
(.....)
(.....)
(.....)
(.....)
(.....)
(.....)

Abstrak

Suatu graf terhubung, sederhana dan tidak berarah yang dinotasikan dengan $G = (V(G), E(G))$. Pelabelan graf didefinisikan dengan pemetaan f dari himpunan titik $V(G)$ dan himpunan garis $E(G)$ ke himpunan $\{1, 2, \dots, k\}$. Pelabelan f disebut pelabelan k total tak reguler sisi apabila untuk setiap dua sisi yang berbeda memiliki bobot yang berbeda pula. Sementara itu, nilai terkecil dari label terbesar k mempunyai pelabelan- k total tak reguler sisi disebut dengan kekuatan total tak reguler sisi dari graf G yang dinotasikan dengan $tes(G)$. Dalam penelitian ini akan ditentukan nilai kekuatan total tak reguler sisi pada graf berlian terhubung, graf *tower*, graf parabola dan graf *eyeglasses* serta melabeli graf tersebut dengan menggunakan pelabelan total tak reguler sisi. Jenis penelitian yang digunakan merupakan penelitian kuantitatif dengan pendekatan studi literatur (*library research*). Berdasarkan penelitian yang telah dilakukan diperoleh nilai kekuatan total tak reguler sisi pada graf berlian terhubung dengan $tes(Bt_n) = 6n$, graf *tower* dengan $tes(T_n) = 4n + 3$, graf parabola dengan $tes(Pr_n) = \left\lceil \frac{5n+3}{3} \right\rceil$ dan graf *eyeglasses* dengan $tes(Eg_n) = \left\lceil \frac{8n+11}{3} \right\rceil$ serta dapat dilabeli dengan menggunakan metode pelabelan total tak reguler sisi.

Kata kunci : pelabelan total tak reguler sisi, graf berlian terhubung, graf *tower*, graf parabola, graf *eyeglasses*

Abstract

A connected, simple and undirected graph is denoted by $G = (V(G), E(G))$. Graph labeling is defined by a mapping f from the vertex set $V(G)$ and the edge set $E(G)$ to the set $\{1, 2, \dots, k\}$. A labeling f is called a k -total irregular edge labeling if any two distinct edges have different weights. Meanwhile, the smallest value of the largest label k has an edge-irregular k -total labeling is called the edge-irregular total strength of the graph G denoted by $\text{tes}(G)$. In this study, the value of the total irregular strength of the edges of the connected diamond graph, tower graph, parabola graph and eyeglassesl graph will be determined and the graphs will be labeled using the total irregular labeling of the edges. The type of research used is qualitative research with a literature study approach (library research). Based on the research that has been done, the value of the total irregular strength of the edges of the connected diamond graph with $\text{tes}(Bt_n) = 6n$, tower graph with $\text{tes}(T_n) = 4n + 3$, parabola graph with $\text{tes}(Pr_n) = \left\lceil \frac{5n+3}{3} \right\rceil$ and eyeglassesl graph with $\text{tes}(Eg_n) = \left\lceil \frac{8n+11}{3} \right\rceil$ and can be labeled with using the total irregular labeling method.

Keywords: total irregular labeling of edges, connected diamond graph, tower graph, parabola graph, eyeglasses graph

BAB I PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Teori graf merupakan salah satu cabang matematika yang berperan penting bagi perkembangan matematika. Graf digunakan untuk menunjukkan perbedaan objek-objek diskrit dan hubungan diantara objek satu dengan yang lainnya. Setelah beberapa tahun terakhir, teori graf telah mengalami beberapa perkembangan yang sangat signifikan. Salah satu faktor yang turut mendorong perkembangan ini adalah tingginya tingkat kecanggihan teknologi komputer dan penerapannya dalam berbagai permasalahan yang berskala besar, seperti optimasi, penjadwalan dan pencarian jalur terdekat atau tercepat. Banyaknya masalah ini dapat dimodelkan dalam bentuk graf dan dipecahkan menggunakan berbagai algoritma yang disediakan oleh teori graf (Paryanti & Thobirin, 2011).

Menurut catatan sejarah, masalah pertama yang menggunakan konsep graf adalah masalah jembatan *konigsberg* di Rusia. Masalah jembatan *konigsberg* ini adalah kemungkinan untuk melalui ketujuh buah jembatan masing-masing tepat satu kali, dan kembali lagi ke tempat semula. Pada tahun 1736, seorang matematikawan Swiss bernama L.Euler berhasil memecahkan masalah ini dengan memodelkannya ke dalam bentuk graf tak sederhana, dimana titik dan sisi dari graf dinyatakan sebagai wilayah dan jembatan. Kemudian Euler menunjukkan bahwa tidak mungkin melalui setiap jembatan tersebut tepat sekali dan kembali lagi ke tempat semula dan solusi yang dikemukakan olehnya adalah syarat graf tersebut haruslah terhubung dan jumlah jembatan yang terhubung ke setiap wilayah adalah sebanyak genap (Maulani, 2023). Secara matematis, suatu graf terhubung, sederhana dan tidak berarah yang dinotasikan dengan $G = (V(G), E(G))$ dimana $(V(G))$ menyatakan suatu himpunan titik (*vertex*) yang tak kosong dan $(E(G))$ menyatakan himpunan garis (*edge*) (Munir, 2016). Diantara sekian banyak konsep dalam teori graf, salah satu konsep yang cukup populer adalah konsep pelabelan graf.

Pelabelan graf merupakan suatu fungsi (pemetaan) injektif yang memetakan elemen dari himpunan semua titik dan elemen dari himpunan semua sisi pada graf G ke himpunan bilangan asli yang disebut dengan label. Dalam pelabelan graf, ada yang dinamakan pelabelan titik, pelabelan sisi dan pelabelan total. Pelabelan titik adalah domain dari fungsi yang merupakan sebuah himpunan titik, dan pelabelan sisi adalah domain dari fungsi yang merupakan sebuah himpunan sisi sedangkan pelabelan total adalah domain dari fungsi yang merupakan sebuah himpunan titik dan sisi. Adapun beberapa jenis pelabelan pada graf yang banyak dikenal seperti pelabelan harmonis, pelabelan tak teratur, pelabelan graceful, pelabelan ajaib (*magic labeling*) dan pelabelan anti ajaib (*anti magic labeling*) (Majid et al., 2023)

(Bača et al., 2007) memperkenalkan tipe pelabelan baru yang dinamakan pelabelan total tak reguler, yang mempunyai tiga jenis pelabelan yaitu pelabelan total tak reguler titik (*vertex irregular total k -labeling*), pelabelan total tak reguler sisi (*edge irregular total k -labeling*) dan pelabelan total tak reguler total (*totally irregular total k -labeling*). Didefinisikan pelabelan graf $f : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ disebut pelabelan k total tak reguler sisi jika untuk setiap dua sisi yang berbeda di G , memiliki bobot sisi yang berbeda.

Pelabelan total tak reguler sisi sudah banyak diteliti oleh para ilmuwan sebelumnya, diantaranya adalah (Ivančo & Jendrol', 2006) yang meneliti tentang nilai ketakaturan sisi total graf pohon. (Susanti et al., 2020) meneliti tentang kekuatan ketidakaturan tepi total pada graf tangga dan graf terkait. (Widiantoro & Rosyida, 2020) meneliti tentang nilai ketakaturan sisi total pada graf rantai *hendecagon* dengan satu sisi *pendant*. Contoh lainnya adalah (Khotimah & Susanti, 2019) yang meneliti tentang kekuatan total tak reguler sisi graf *double fan* dan graf-graf terkait graf *double fan*. (Sancoko et al., 2017) meneliti tentang kekuatan tak reguler sisi total pada graf *umbrella* dan graf fraktal. (Setiawati et al., 2023) meneliti tentang pelabelan total tak reguler sisi pada graf *direction*, graf *direction right*, dan graf *heart*. Selain itu, untuk melihat graf-graf yang telah dibuktikan nilai kekuatan total tak reguler sisinya, dapat dilihat pada survey yang dilakukan oleh (Gallian, 2022).

Berdasarkan latar belakang diatas, penulis akan meneliti dan mencari bentuk graf baru yang belum pernah diteliti sebelumnya dan akan ditentukan nilai kekuatan total tak reguler sisi pada masing-masing graf yang telah diperoleh. Selanjutnya adalah melabeli graf tersebut dengan menggunakan pelabelan total tak reguler sisi pada suatu graf. Dalam tugas akhir ini, terdapat empat jenis bentuk graf baru yang telah dibuat yang kemudian diberi nama dengan graf berlian terhubung, graf *tower*, graf parabola dan graf *eyeglasses*.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah dijelaskan diatas, adapun rumusan masalah dalam penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Bagaimana menentukan nilai kekuatan total tak reguler sisi pada graf berlian terhubung, graf *tower*, graf parabola dan graf *eyeglasses*?
2. Bagaimana bentuk pelabelan pada graf berlian terhubung, graf *tower*, graf parabola dan graf *eyeglasses*?

1.3 Tujuan Penelitian

Penelitian ini bertujuan untuk:

1. Mengetahui nilai kekuatan total tak reguler sisi pada graf berlian terhubung, graf *tower*, graf parabola dan graf *eyeglasses*.
2. Mengetahui bahwa pada graf berlian terhubung, graf *tower*, graf parabola dan graf *eyeglasses* dapat dilabeli dengan menggunakan pelabelan total tak reguler sisi.

1.4 Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat memberikan manfaat bagi:

1. Penulis

Melalui penelitian ini, penulis dapat memperdalam pemahaman mengenai teori graf, khususnya dalam aspek pelabelan total tak reguler sisi pada graf serta dapat mengetahui cara penentuan nilai kekuatan total tak reguler sisi pada graf yang sedang diteliti yaitu graf berlian terhubung, graf *tower*, graf parabola dan graf *eyeglasses*.

2. Pembaca

Hasil dari penelitian ini dapat menjadi referensi bagi pembaca yang ingin melakukan penelitian lanjutan di bidang pelabelan graf atau aplikasi teori graf lainnya. Selain itu, penelitian ini juga dapat menambah wawasan literatur pembaca mengenai kajian graf dalam bidang matematika serta dapat memperoleh inspirasi dalam menerapkan konsep pelabelan graf untuk suatu masalah lainnya atau dapat menciptakan suatu bentuk graf baru dengan pelabelan total tak reguler sisi.

BAB II KAJIAN PUSTAKA

Pada bab ini diberikan definisi, teorema serta contoh-contoh yang mendukung materi pokok yaitu pelabelan total tak reguler sisi pada graf untuk mempermudah pemahaman pada bab selanjutnya. Bab ini terdiri dari beberapa sub bab, antara lain himpunan, relasi dan fungsi, teori graf serta pelabelan total tak reguler sisi pada graf.

2.1 Himpunan

Terminologi dasar tentang sekumpulan objek diskrit adalah himpunan. Himpunan digunakan untuk mengelompokkan objek secara bersama-sama. Himpunan merupakan struktur diskrit fundamental yang mendasari struktur diskrit lainnya seperti relasi, kombinasi, dan graf. Berikut diberikan definisi dari himpunan.

Definisi 2.1 (Munir, 2016)

Himpunan (*set*) adalah kumpulan objek-objek yang *berbeda* dan memiliki kesamaan sifat.

Objek yang terdapat di dalam himpunan disebut **elemen**, **unsur**, atau **anggota**. Dapat dikatakan bahwa himpunan memuat elemen-elemennya. Kata "berbeda" di dalam definisi diatas adalah penting (sehingga dicetak miring) untuk menekankan bahwa maksud anggota himpunan tidak boleh sama. Berikut ini diberikan contoh dari suatu himpunan.

Contoh 2.1

Misalkan A adalah himpunan bilangan bulat positif yang kecil dari 5, dinyatakan sebagai

$$A = \{x \mid x \text{ adalah himpunan bilangan bulat positif lebih kecil dari } 5\}$$

atau dalam notasi yang lebih ringkas:

$$A = \{x \mid x \in \mathbb{Z}^+, x < 5\}$$

yang sama dengan $A = \{1, 2, 3, 4\}$.

Terdapat beberapa jenis operasi yang lazim digunakan terhadap himpunan. Berikut ini diberikan definisi beserta contoh dari setiap operasi tersebut.

Definisi 2.2 (Munir, 2016)

Irisan (*intersection*) dari himpunan A dan B adalah sebuah himpunan yang setiap elemennya merupakan elemen dari himpunan A dan himpunan B .

Irisan dari himpunan disimbolkan dengan notasi " $\cap$ " dengan

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ dan } x \in B\}$$

Jika dua himpunan saling lepas, maka irisannya adalah himpunan kosong, karena tidak ada elemen yang sama yang terdapat di dalam kedua himpunan tersebut. Berikut diberikan contohnya.

Contoh 2.2

Tinjau (i) dan (ii) dibawah ini.

- (i) Jika $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ dan $B = \{4, 10, 14, 18\}$, maka $A \cap B = \{4, 10\}$
- (ii) Jika $A = \{3, 5, 9\}$ dan $B = \{-2, 6\}$, maka $A \cap B = \{\emptyset\}$

Selanjutnya diberikan definisi untuk operasi gabungan (*union*).

Definisi 2.3 (Munir, 2016)

Gabungan (*union*) dari himpunan A dan B adalah himpunan yang setiap anggotanya merupakan anggota himpunan A atau himpunan B .

Gabungan dari himpunan disimbolkan dengan notasi " $\cup$ " dengan

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ atau } x \in B\}$$

Berikut diberikan contohnya.

Contoh 2.3

Misalkan $A = \{2, 5, 8\}$ dan $B = \{5, 7, 22\}$, maka $A \cup B = \{2, 5, 7, 8, 22\}$

Jenis operasi selanjutnya adalah komplemen. Berikut diberikan definisinya.

Definisi 2.4 (Munir, 2016)

Komplemen dari suatu himpunan A terhadap suatu himpunan semesta U adalah suatu himpunan yang elemennya merupakan elemen U yang bukan elemen A .

Komponen dari himpunan disimbolkan dengan notasi " A^c " dengan

$$A^c = \{x \mid x \in U \text{ dan } x \notin A\}$$

Berikut diberikan contohnya.

Contoh 2.4

Misalkan $U = \{1, 2, 3, \dots, 9\}$, jika $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ maka $A^c = \{2, 4, 6, 8\}$

Selanjutnya diberikan definisi untuk operasi selisih (*difference*).

Definisi 2.5 (Munir, 2016)

Selisih dari dua himpunan A dan B adalah suatu himpunan yang elemennya merupakan elemen dari A tetapi bukan elemen dari B . Selisih antara A dan B dapat juga dikatakan sebagai komplemen himpunan B relatif terhadap himpunan A .

Selisih dari himpunan disimbolkan dengan notasi " $-$ " dengan

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ dan } x \notin B\} = A \cap B^c$$

Perhatikan bahwa komplemen dari sebarang himpunan A terhadap semesta U dapat juga didefinisikan sebagai $A^c = U - A$. Berikut diberikan contohnya.

Contoh 2.5

Misalkan $A = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ dan $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, maka $A - B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, dan $B - A = \emptyset$.

Selanjutnya untuk jenis operasi yang terakhir yaitu perkalian kartesian. Berikut diberikan definisinya.

Definisi 2.6 (Munir, 2016)

Perkalian kartesian dari himpunan A dan B adalah himpunan yang elemennya semua pasangan berurutan (*ordered pairs*) yang dibentuk dari komponen pertama dari himpunan A dan komponen kedua dari himpunan B .

Perkalian kartesian dari himpunan disimbolkan dengan notasi " $\times$ " dengan

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ dan } b \in B\}$$

Berikut diberikan contohnya.

Contoh 2.6

Misalkan $A = \{1, 2, 3\}$ dan $B = \{a, b\}$, maka perkalian kartesian A dan B adalah $A \times B = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$.

Lebih lanjut, diberikan definisi dari kardinalitas suatu himpunan.

Definisi 2.7 (Munir, 2016)

Sebuah himpunan dikatakan **berhingga** (*finite set*) jika terdapat n elemen berbeda (*distinct*) yang dalam hal ini n adalah bilangan bulat tak-negatif. Sebaliknya himpunan tersebut dinamakan **tak-berhingga** (*infinite set*).

Misalkan A merupakan himpunan berhingga, maka jumlah elemen berbeda di dalam A disebut **kardinal** dari himpunan A . Kardinalitas himpunan disimbolkan dengan notasi

$$n(A) \text{ atau } |A|$$

Berikut diberikan contohnya.

Contoh 2.7

Di bawah ini adalah contoh-contoh himpunan berhingga:

$$(i) \quad A = \{x \mid x \text{ merupakan bilangan prima yang lebih kecil dari } 20\}, \quad \text{maka}$$

$$|A| = 8 \text{ dengan elemen-elemen } A \text{ adalah } 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19$$

$$(ii) \quad B = \{1, 3, 5, 7, 9\} \text{ maka } |B| = 5$$

Himpunan yang tidak berhingga mempunyai kardinal tidak berhingga pula. Sebagai contoh, himpunan bilangan riil mempunyai jumlah anggota tidak berhingga, maka $|\mathbb{R}| = \infty$, begitu juga himpunan bilangan bulat tak-negatif dan lain-lain.

2.2 Relasi dan Fungsi

Hubungan antara elemen himpunan dengan elemen himpunan lain dinyatakan dengan struktur yang disebut relasi. Pada sub bab ini akan dibahas mengenai relasi serta jenis khusus relasi yang disebut fungsi.

2.2.1 Relasi

Pada sub bab mengenai himpunan kita sudah mengenal pasangan terurut (*ordered pairs*). Cara yang paling mudah menyatakan hubungan antara elemen dari dua himpunan adalah dengan himpunan pasangan terurut. Himpunan pasangan terurut diperoleh dari perkalian kartesian (*cartesian products*) antara dua himpunan. Relasi antara himpunan A dan B disebut **relasi biner**, didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 2.8 (Munir, 2016)

Relasi biner R antara A dan B adalah himpunan bagian dari $A \times B$.

Relasi biner tersebut disimbolkan dengan $R \subseteq (A \times B)$

Jika $(a, b) \in R$, kita gunakan notasi aRb yang artinya a dihubungkan dengan b oleh R , dan jika $(a, b) \notin R$, kita gunakan notasi $a \nR b$ yang artinya a tidak dihubungkan dengan b oleh relasi R . Himpunan A disebut **daerah asal** (*domain*) dari R , dan himpunan B disebut **daerah hasil** (*codomain*) dari R .

Berikut ini diberikan contoh dari relasi antar himpunan.

Contoh 2.8

Misalkan $A = \{\text{Ana, Bayu, Dita}\}$ adalah himpunan nama mahasiswa, dan $B = \{\text{MAT182, MAT353, MAT203, MAT213}\}$ adalah himpunan kode mata kuliah di jurusan matematika. Perkalian kartesian antara A dan B menghasilkan himpunan pasangan terurut yang jumlah anggotanya adalah $|A| \cdot |B| = 3 \cdot 4 = 12$ buah, yaitu

$$A \times B = \{(\text{Ana, MAT182}), (\text{Ana, MAT353}), (\text{Ana, MAT203}), (\text{Ana, MAT213}), (\text{Bayu, MAT182}), (\text{Bayu, MAT353}), (\text{Bayu, MAT203}), (\text{Bayu, MAT213}), (\text{Dita, MAT182}), (\text{Dita, MAT353}), (\text{Dita, MAT203}), (\text{Dita, MAT213})\}$$

Misalkan R adalah relasi yang menyatakan mata kuliah yang diambil oleh mahasiswa pada semester ganjil, maka diperoleh

$$R = \{(\text{Ana, MAT182}), (\text{Bayu, MAT353}), (\text{Dita, MAT213})\}$$

Kita dapat melihat bahwa $R \subseteq (A \times B)$, A adalah daerah asal R , dan B adalah daerah hasil R . Oleh karena $(\text{Ana, MAT182}) \in R$, kita dapat menuliskan $\text{Ana } R \text{ MAT182}$, tetapi $(\text{Ana, MAT203}) \notin R$ sehingga kita menuliskan $\text{Ana} \nR \text{MAT203}$.

Contoh 2.9

Misalkan $P = \{2, 3, 4\}$ dan $Q = \{2, 4, 8, 9, 15\}$. Jika kita definisikan relasi R dari P ke Q dengan $(p, q) \in R$, jika p habis membagi q

maka diperoleh

$$R = \{(2, 2), (2, 4), (2, 8), (3, 9), (3, 15), (4, 4), (4, 8)\}$$

Daerah asal dan daerah hasil relasi bisa saja merupakan himpunan yang sama. Ini berarti relasi hanya didefinisikan pada sebuah himpunan. Relasi yang didefinisikan hanya pada sebuah himpunan adalah relasi yang khusus. Definisi relasi khusus ini dikemukakan dengan definisi berikut.

Definisi 2.9 (Munir, 2016)

Relasi pada himpunan A adalah relasi dari $A \times A$.

Dengan kata lain, relasi pada himpunan A adalah himpunan bagian dari $A \times A$.

Berikut diberikan contoh relasi dari $A \times A$.

Contoh 2.10

Misalkan R adalah relasi pada $A = \{2, 3, 4, 8, 9\}$ yang didefinisikan oleh $(x, y) \in R$ jika x adalah faktor prima dari y . Maka

$$R = \{(2, 2), (2, 4), (2, 8), (3, 3), (3, 9)\}$$

2.2.2 Fungsi

Fungsi sering dipakai untuk mentransformasikan elemen di sebuah himpunan dengan elemen di himpunan lain. Berikut di berikan definisi dari fungsi.

Definisi 2.10 (Munir, 2016)

Misalkan A dan B himpunan. Relasi biner f dari A ke B merupakan suatu fungsi jika setiap elemen di dalam A dihubungkan dengan tepat satu elemen di dalam B . Jika f adalah fungsi dari A ke B kita menuliskan

$$f : A \rightarrow B$$

yang artinya f **memetakan** A ke B .

Nama lain untuk fungsi adalah **pemetaan** atau **transformasi**. Kita menuliskan

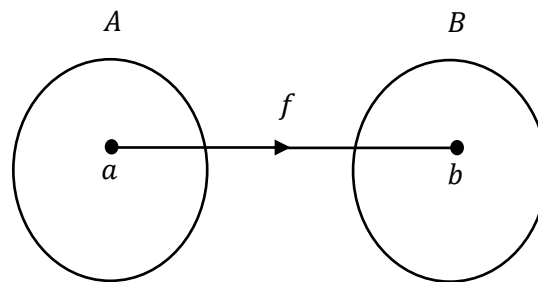
$f(a) = b$ jika elemen a di dalam A dihubungkan dengan elemen b di dalam B .

Himpunan A disebut **daerah asal** (*domain*) dari f dan himpunan B disebut

daerah hasil (*codomain*) dari f . Himpunan yang berisi semua nilai pemetaan f

disebut **jelajah** (*range*) dari f . Pada Gambar 2.1 merepresentasikan fungsi dari A

ke B .



Gambar 2.1 Fungsi f memetakan A ke B

Berikut diberikan beberapa contoh dari relasi suatu fungsi.

Contoh 2.11

Relasi $f = \{(1, u), (2, v), (3, w)\}$ dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$ adalah fungsi dari A ke B . Disini $f(1) = u$, $f(2) = v$, dan $f(3) = w$. Daerah asal dari f adalah A dan daerah hasil adalah B . Jelajah dari f adalah $\{u, v, w\}$, yang dalam hal ini sama dengan himpunan B .

Contoh 2.12

Relasi $f = \{(1, u), (2, v), (3, w)\}$ dari $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ke $B = \{u, v, w\}$ bukan fungsi, karena tidak semua elemen A dipetakan ke B .

Contoh 2.13

Relasi $f = \{(1, u), (2, u), (3, v)\}$ dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$ adalah fungsi dari A ke B , meskipun u merupakan bayangan dari dua elemen A . Daerah asal fungsi adalah A , daerah hasilnya adalah B , dan jelajah fungsi adalah $\{u, v\}$.

Contoh 2.14

Relasi $f = \{(1, u), (1, v), (2, v), (3, w)\}$ dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$ bukan fungsi, karena 1 dipetakan ke dua buah elemen B , yaitu u dan v .

Bergantung pada bayangan, fungsi dibedakan menjadi fungsi satu-ke-satu (*one-to-one*), fungsi pada (*onto*), atau bukan salah satu dari keduanya. Kita tinjau definisi jenis setiap fungsi tersebut berikut ini.

Definisi 2.11 (Munir, 2016)

Fungsi f dikatakan **satu-ke-satu** (*one-to-one*) atau **injektif** (*injective*) jika tidak ada dua elemen himpunan A yang memiliki bayangan sama. Dengan kata lain, jika

a dan b adalah anggota himpunan A , maka $f(a) \neq f(b)$ bilamana $a \neq b$. Jika $f(a) = f(b)$ maka implikasinya adalah $a = b$.

Berikut merupakan contoh dari fungsi injektif.

Contoh 2.15

Misalkan $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$. Tentukan apakah $f(x) = x - 1$ merupakan fungsi injektif?

Penyelesaian:

Ambil sebarang $a, b \in \mathbb{Z}$ dengan $f(a) = f(b)$. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} f(a) &= f(b) \\ a - 1 &= b - 1 \\ a &= b \end{aligned}$$

diperoleh $a = b$. Dengan demikian f adalah fungsi injektif.

Selanjutnya adalah fungsi (*onto*) atau surjektif. Berikut diberikan definisinya.

Definisi 2.12 (Munir, 2016)

Fungsi f dikatakan **pada** (*onto*) atau **surjektif** (*surjective*) jika setiap elemen himpunan B merupakan bayangan dari satu atau lebih elemen A . Dengan kata lain seluruh elemen B merupakan jelajah dari f . Fungsi f disebut fungsi pada himpunan B .

Berikut diberikan contoh dari fungsi surjektif.

Contoh 2.16

Misalkan $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$. Tentukan apakah $f(x) = x - 1$ merupakan fungsi surjektif?

Penyelesaian:

Ambil sebarang $b \in \mathbb{Z}$ akan ditentukan $a \in \mathbb{Z}$ sedemikian sehingga memenuhi $f(a) = b$. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} f(a) &= b \\ a - 1 &= b \\ a &= b + 1 \end{aligned}$$

karena $b + 1 \in \mathbb{Z}$, sehingga terdapat $a = b + 1 \in \mathbb{Z}$ sedemikian sehingga

$$\begin{aligned}
 f(a) &= f(b+1) \\
 f(a) &= (b+1)-1 \\
 f(a) &= b
 \end{aligned}$$

dengan demikian, f adalah fungsi surjektif.

Selanjutnya diberikan definisi dari fungsi bijektif.

Definisi 2.13 (Munir, 2016)

Fungsi f dikatakan **berkoresponden satu-ke-satu** atau **bijeksi** (*bijection*) jika ia fungsi satu-ke-satu maupun fungsi surjektif.

Berikut adalah contoh dari fungsi bijektif.

Contoh 2.17

Fungsi $f(x) = x - 1$ merupakan fungsi yang berkoresponden satu-ke-satu atau bijektif, karena berdasarkan Contoh 2.15 dan Contoh 2.16 diperoleh bahwa f adalah fungsi injektif dan surjektif.

Selanjutnya diberikan contoh fungsi injektif yang bukan fungsi surjektif.

Contoh 2.18

Misalkan $A = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 1\}$ dengan $f(x) = \frac{2x}{(x-1)} \forall x \in A$. Buktikan bahwa

fungsi f merupakan fungsi injektif tetapi bukan fungsi surjektif.

Penyelesaian:

Akan ditunjukkan bahwa $f(x) = \frac{2x}{(x-1)}$ fungsi injektif

Ambil sebarang $a, b \in \mathbb{R}$ dengan $f(a) = f(b)$. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
f(a) &= f(b) \\
\frac{2a}{(a-1)} &= \frac{2b}{(b-1)} \\
2a(b-1) &= 2b(a-1) \\
2ab - 2a &= 2ab - 2b \\
2(ab - a) &= 2(ab - b) \\
ab - a &= ab - b \\
-a &= ab - b - ab \\
-a &= -b \\
a &= b
\end{aligned}$$

karena $f(a) = f(b)$ berakibat $a = b$, maka terbukti bahwa $f(x) = \frac{2x}{(x-1)}$ merupakan fungsi injektif.

Selanjutnya ditunjukkan bahwa $f(x) = \frac{2x}{(x-1)}$ bukan fungsi surjektif.

Ambil sebarang $b \in \mathbb{R}$ akan ditentukan $a \in \mathbb{R}$ sedemikian sehingga memenuhi $f(a) = b$. Perhatikan bahwa, ada $b = 2$ sedemikian sehingga

$$\begin{aligned}
f(a) &= 2 \\
\frac{2a}{(a-1)} &= 2
\end{aligned}$$

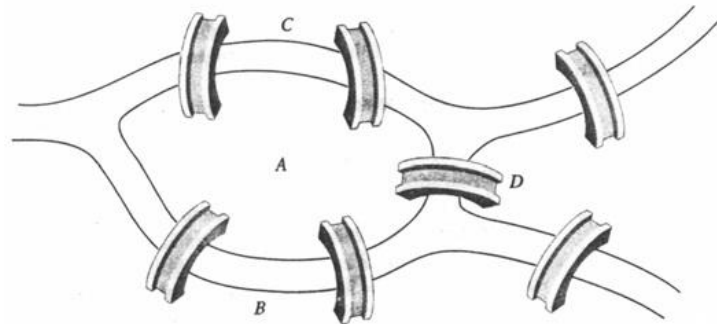
dari sini diperoleh bahwa tidak ada $a \in \mathbb{R}$ yang memenuhi, sedemikian sehingga

$$\frac{2a}{(a-1)} = 2$$

oleh karena itu, terbukti bahwa $f(x) = \frac{2x}{(x-1)}$ bukan fungsi surjektif.

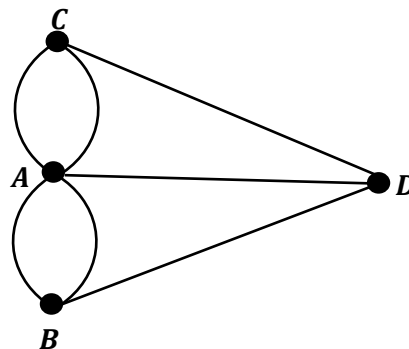
2.3 Teori Graf

Teori graf merupakan pokok bahasan yang banyak penerapannya pada masa kini. Makalah pertama tentang teori graf ditulis pada tahun 1736 oleh seorang matematikawan Swiss yang bernama Leonard Euler. Ia menggunakan teori graf untuk menyelesaikan masalah jembatan *konigsberg* (sekarang, bernama Kaliningrad). Berikut adalah ilustrasi masalah tersebut.



Gambar 2.2 Masalah jembatan *konigsberg*

Masalah yang dikemukakan Euler : Dapatkah melewati setiap jembatan tepat sekali dan kembali lagi ke tempat semula? Berikut adalah sketsa yang merepresentasikan ilustrasi jembatan *konigsberg* pada gambar diatas. Himpunan titik yaitu $\{A, B, C, D\}$ merepresentasikan sebagai daratan, dan garis yang menghubungkan titik-titik tersebut adalah sebagai jembatan.



Gambar 2.3 Representasi graf masalah jembatan *konigsberg*

Jawaban pertanyaan Euler adalah tidak mungkin. Agar bisa melalui setiap jembatan tepat sekali dan kembali lagi ke tempat semula maka jumlah jembatan yang menghubungkan setiap daratan harus genap (Adiwijaya, 2016).

Sebelum membahas lebih lanjut mengenai pelabelan total tak reguler sisi, terlebih dahulu dibahas beberapa definisi dasar yang berkaitan dengan teori graf.

2.3.1 Definisi Graf

Secara matematis, graf didefinisikan sebagai berikut.

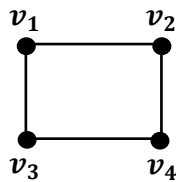
Definisi 2.14 (Rahayuningsih, 2018)

Suatu graf G terdiri dari suatu himpunan titik (*vertex*) yang tak kosong ($V(G)$) dan himpunan garis (*edge*) ($E(G)$) dan dinotasikan dengan $G = (V(G), E(G))$.

Lebih lanjut G melambangkan suatu graf. Himpunan titik di graf G dinyatakan dengan $V(G)$ dan himpunan sisi di graf G dinyatakan dengan $E(G)$. Jadi, suatu graf G merupakan pasangan terurut dari himpunan $V(G)$ dan $E(G)$. Selanjutnya dapat ditulis dengan $G = (V(G), E(G))$. Titik dan sisi pada graf dapat dilabeli dengan huruf, bilangan bulat positif serta gabungan dari keduanya.

Contoh 2.19

Pada Gambar 2.4 berikut ini, menunjukkan sebuah graf $G = (V(G), E(G))$ dengan himpunan titik $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan himpunan sisi $E(G) = \{v_1v_2, v_1v_3, v_2v_4, v_3v_4\}$.



Gambar 2.4 Graf G

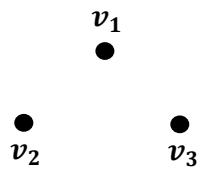
Berdasarkan definisi graf, himpunan sisi $E(G)$ memungkinkan berupa himpunan kosong. Lebih lanjut diberikan definisi dari **graf kosong** (*null graph* atau *empty graph*).

Definisi 2.15 (Marsudi, 2016)

Jika graf mempunyai himpunan sisi yang merupakan himpunan kosong maka graf tersebut dinamakan graf kosong (*null graph* atau *empty graph*) dengan notasi N_n , dimana n menunjukkan banyaknya titik pada graf tersebut. Berikut diberikan contohnya.

Contoh 2.20

Berikut merupakan graf kosong dengan 3 titik (graf N_3)



Gambar 2.5 Graf N_3

Graf dapat dikelompokkan menjadi beberapa kategori (jenis) bergantung pada sudut pandang pengelompokannya. Pengelompokan graf dapat dipandang berdasarkan ada tidaknya sisi ganda atau sisi kalang, berdasarkan jumlah titik, atau berdasarkan orientasi arah pada sisi.

Dua sisi atau lebih yang menghubungkan pasangan titik yang sama disebut sisi ganda (*multi edges*). Sedangkan sisi yang menghubungkan suatu titik dengan dirinya sendiri disebut gelang (*loop*).

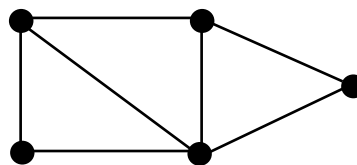
Berdasarkan ada tidaknya gelang atau sisi ganda pada suatu graf, maka secara umum graf dapat digolongkan menjadi dua jenis:

Definisi 2.16 (Marsudi, 2016)

Suatu graf yang tidak memiliki *loop* dan tidak memiliki sisi ganda disebut graf sederhana (*simple graph*).

Contoh 2.21

Graf berikut ini merupakan graf sederhana



Gambar 2.6 Graf sederhana

Pada graf sederhana, sisi adalah pasangan tak-terurut (*unordered pairs*). Jadi, untuk sisi uv sama dengan sisi vu . Selanjutnya, diberikan definisi dari graf yang tidak sederhana sebagai berikut.

Definisi 2.17 (Munir, 2010)

Graf yang memiliki sisi ganda atau gelang dinamakan graf yang tak-sederhana (*unsimple graph*).

Ada dua macam graf tak-sederhana, yaitu **graf ganda** (*multigraph*) dan **graf semu** (*pseudograph*). Berikut diberikan definisinya.

Definisi 2.18 (Munir, 2010)

Suatu graf yang memiliki sisi ganda disebut graf ganda (*multigraph*).

Sisi ganda yang menghubungkan sepasang titik bisa lebih dari dua buah. Sisi ganda dapat diasosiasikan sebagai pasangan tak-terurut yang sama.

Definisi 2.19 (Munir, 2010)

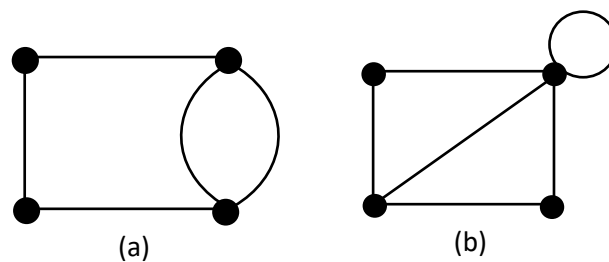
Suatu graf yang memiliki *loop* disebut graf semu (*pseudograph*).

Graf semu lebih umum dari pada graf ganda, karena sisi pada graf semu terhubung ke dirinya sendiri.

Berikut diberikan contoh dari graf ganda dan graf semu.

Contoh 2.22

Perhatikan graf berikut,



Gambar 2.7 (a) Graf ganda, (b) Graf semu

Pada Gambar 2.7 merupakan contoh graf tak-sederhana yaitu graf ganda dan graf semu.

Berdasarkan orientasi arah pada sisi maka secara umum graf dibedakan menjadi dua jenis yaitu graf tak berarah dan graf berarah. Berikut diberikan definisinya.

Definisi 2.20 (Munir, 2016)

Graf yang sisinya tidak mempunyai orientasi arah disebut graf tak-berarah.

Pada graf G tak-berarah, urutan pasangan titik tidak diperhatikan. Jadi, $uv = vu$ adalah sisi yang sama. Kemudian dapat dilihat pada Gambar 2.4 yang merupakan contoh dari graf tak-berarah.

Selanjutnya diberikan definisi dari graf berarah.

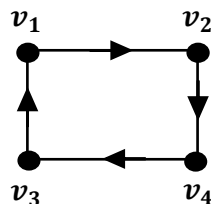
Definisi 2.21 (Munir, 2016)

Graf yang setiap sisinya diberikan orientasi arah disebut sebagai graf berarah.

Pada graf berarah sisi disebut sebagai **busur**. Pada graf G berarah, urutan pasangan diperhatikan. Dengan kata lain, sisi $uv \neq vu$. Pada graf berarah uv dan vu menyatakan dua arah (busur) yang berbeda. Untuk busur uv , titik u dinamakan **titik asal** (*initial vertex*) dan titik v dinamakan **titik tujuan** (*terminal vertex*). Pada graf berarah, gelang diperbolehkan tetapi sisi ganda tidak. Berikut diberikan contoh dari graf berarah.

Contoh 2.23

Perhatikan bahwa graf berikut merupakan graf berarah



Gambar 2.8 Graf berarah

Selanjutnya, pada graf sederhana (*simple graph*) terdapat beberapa graf khusus. Berikut merupakan beberapa jenis graf dan contoh dari graf tersebut.

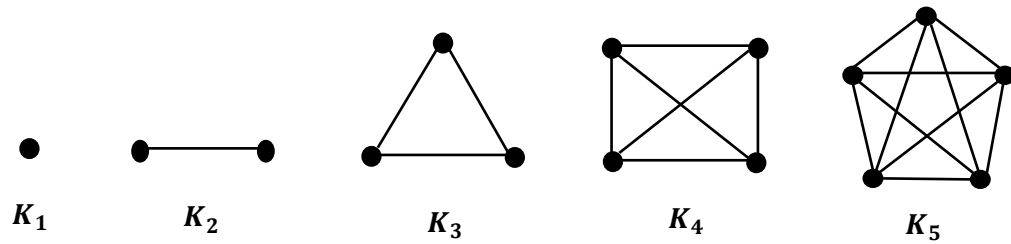
Definisi 2.22 (Adiwijaya, 2016)

Graf lengkap (*complete graph*) merupakan graf sederhana yang setiap titiknya terhubung (oleh satu sisi) ke semua titik lainnya.

Dengan kata lain, setiap titiknya bertetangga. Graf lengkap dengan n buah titik dilambangkan dengan K_n . Setiap titik pada K_n berderajat $(n-1)$. Berikut diberikan contohnya.

Contoh 2.24

Diberikan graf lengkap dengan jumlah masing-masing titiknya adalah satu titik, dua titik, tiga titik, empat titik dan lima titik yang dinotasikan dengan K_1, K_2, K_3, K_4 dan K_5 .



Gambar 2.9 Graf lengkap $K_n, 1 \leq n \leq 5$

Jumlah sisi pada sebuah graf lengkap yang terdiri dari n buah titik adalah $\frac{n(n-1)}{2}$ sisi. Rumus ini diperoleh dari: untuk 1 buah titik terdapat $(n-1)$ buah sisi ke $(n-1)$ titik lainnya, maka untuk n buah titik terdapat $n(n-1)$ buah sisi. Karena setiap sisi terhitung dua kali untuk pasangan titik yang bersisian dengannya, maka jumlah sisi seluruhnya dibagi dua, yaitu $\frac{n(n-1)}{2}$.

Selanjutnya adalah graf lingkaran (*cycle graph*). Berikut diberikan definisinya.

Definisi 2.23 (Adiwijaya, 2016)

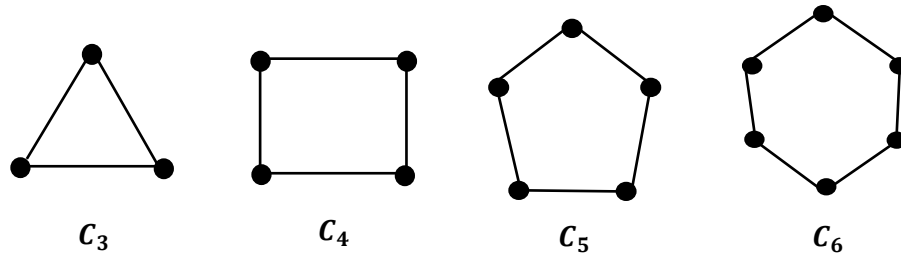
Graf lingkaran (*cycle graph*) merupakan graf sederhana yang setiap titiknya berderajat dua. Graf lingkaran dengan n titik dilambangkan dengan C_n .

Jika titik-titik pada C_n adalah $v_1, v_2, \dots, v_n$, maka sisi-sisinya adalah $(v_1, v_2), (v_2, v_3), \dots, (v_{n-1}, v_n)$, dan (v_n, v_1) . Dengan kata lain, ada sisi dari titik terakhir v_n ke titik pertama v_1 .

Berikut diberikan contohnya.

Contoh 2.25

Diberikan graf *cycle* dengan jumlah masing-masing titiknya adalah tiga titik, empat titik, lima titik dan enam titik yang dinotasikan dengan C_3, C_4, C_5 dan C_6 . Berikut diberikan ilustrasinya.



Gambar 2.10 Graf cycle $C_n, 3 \leq n \leq 6$

Selanjutnya diberikan definisi dari graf teratur (*regular graph*) sebagai berikut.

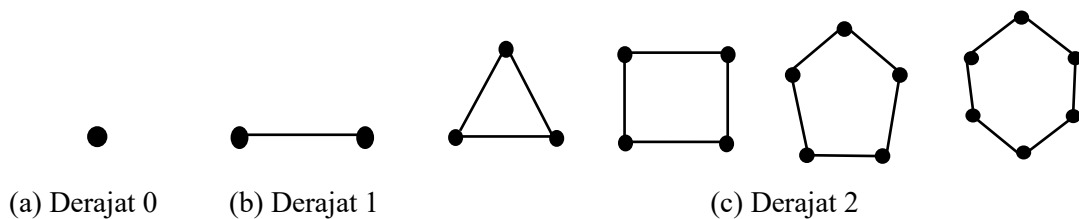
Definisi 2.24 (Marsudi, 2016)

Suatu graf G disebut graf teratur (*regular graph*) jika semua titik di G mempunyai derajat sama. Jika setiap titik di G berderajat r , maka G dikatakan graf teratur derajat r (r -Regular).

Berikut diberikan contohnya.

Contoh 2.26

Pada Gambar 2.11, adalah contoh graf teratur berderajat 0, 1, dan 2.



Gambar 2.11 Graf teratur berderajat 0, 1 dan 2

Dari sini diketahui bahwa graf K_n juga adalah graf teratur berderajat $(n-1)$.

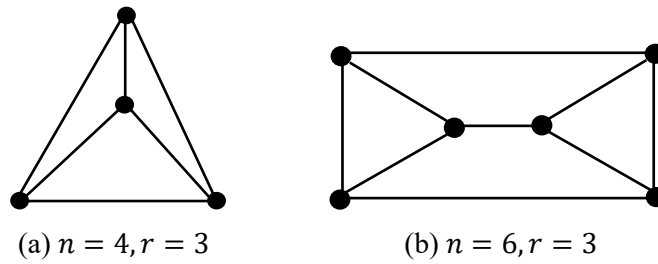
Demikian pula graf lingkaran C_n juga graf teratur berderajat 2. Jumlah sisi pada

graf teratur dengan n titik adalah $\frac{nr}{2}$ sisi. Berikut diberikan contohnya.

Contoh 2.27

Berikut merupakan :

- Graf teratur berderajat 3 dengan 4 buah titik
- Graf teratur berderajat 3 dengan 6 buah titik.



Gambar 2.12 Graf reguler derajat 3

Selanjutnya adalah graf roda (*wheels graph*). Berikut diberikan definisinya.

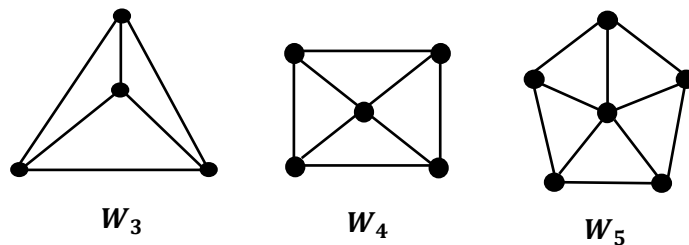
Definisi 2.25 (Adiwijaya, 2016)

Graf roda (*wheels graph*) merupakan graf yang diperoleh dengan cara menambahkan satu titik pada graf lingkaran C_n , dan menghubungkan titik baru tersebut dengan semua titik pada graf lingkaran tersebut.

Graf roda dinotasikan dengan W_n yang terdiri dari $n+1$ titik dan $2n$ sisi. Berikut diberikan contohnya.

Contoh 2.28

Berikut ilustrasi dari bentuk graf roda,



Gambar 2.13 Graf roda

Selanjutnya adalah graf bipartit (*bipartite graph*). Berikut diberikan definisinya.

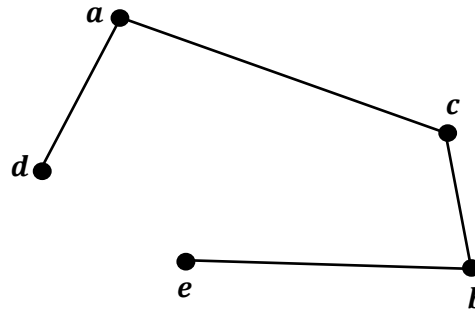
Definisi 2.26 (Adiwijaya, 2016)

Sebuah graf sederhana G dikatakan graf bipartit (*bipartite graph*) jika himpunan titik pada graf tersebut dapat dipisah menjadi dua himpunan tak kosong yang *disjoint*, misalkan V_1 dan V_2 , sedemikian sehingga setiap sisi pada G menghubungkan sebuah titik pada V_1 dan sebuah titik pada V_2 . Dengan demikian, pada graf bipartit tidak ada sisi yang menghubungkan dua titik pada V_1 atau V_2 . Graf bipartit tersebut dinotasikan oleh $G(V_1, V_2)$.

Berikut diberikan contohnya.

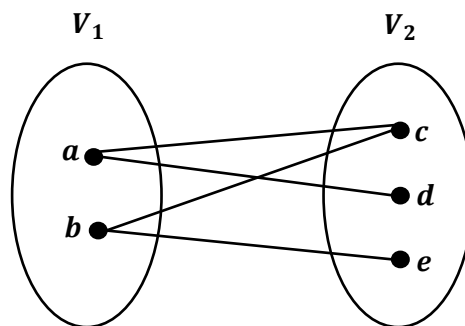
Contoh 2.29

Graf G berikut merupakan graf bipartit,



Graf diatas dapat direpresentasikan menjadi graf bipartit $G(V_1, V_2)$, dimana

$V_1 = \{a, b\}$ dan $V_2 = \{c, d, e\}$.



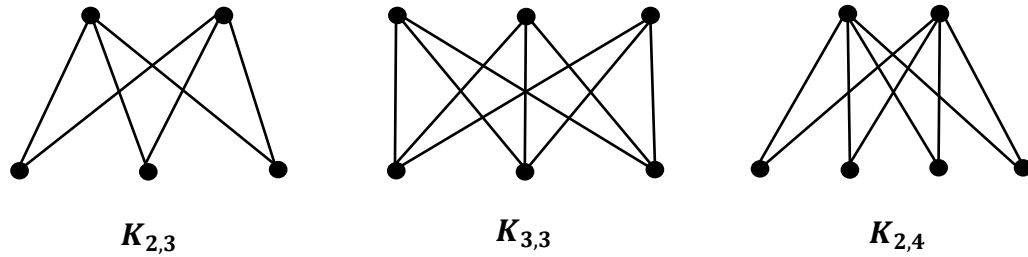
Gambar 2.14 Graf bipartit $G(V_1, V_2)$

Apabila setiap titik di V_1 bertetangga dengan semua titik di V_2 maka $G(V_1, V_2)$ disebut sebagai **graf bipartit lengkap** (*complete bipartite graph*), dilambangkan dengan $K_{m,n}$. Jumlah sisi pada graf bipartit lengkap adalah mn .

Berikut diberikan contohnya.

Contoh 2.30

Graf pada Gambar 2.15 adalah graf bipartit lengkap $K_{2,3}, K_{3,3}, K_{2,4}$.



Gambar 2.15 Graf bipartit lengkap $K_{2,3}, K_{3,3}, K_{2,4}$

Jenis graf lainnya adalah graf *path*. Berikut diberikan definisi dari graf *path*.

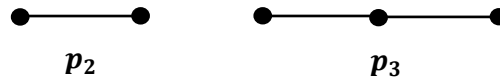
Definisi 2.27 (Wilson, 1996)

Suatu graf yang diperoleh dari graf C_n yang terdiri dari sebuah lintasan tunggal dengan n titik adalah graf lintasan (*path*), yang dinotasikan dengan p_n .

Berikut diberikan contohnya.

Contoh 2.31

Berikut adalah bentuk dari graf *path* p_2 dan p_3



Gambar 2.16 Graf *path* p_n

Selanjutnya adalah graf berlabel. Berikut diberikan definisi dari graf berlabel.

Definisi 2.28 (Marsudi, 2016)

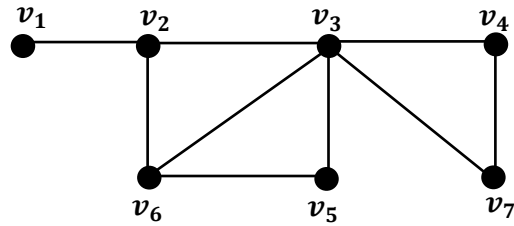
Suatu graf yang setiap titiknya diberi label yang tunggal disebut graf berlabel.

Graf juga dapat diberi label pada sisinya, tergantung representasi label yang diberikan.

Berikut diberikan contohnya.

Contoh 2.32

Graf G pada Gambar 2.17 titik-titiknya diberi label $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$ dan v_7 .

Gambar 2.17 Graf berlabel G

2.3.2 Terminologi Graf

Dibawah ini didefinisikan beberapa terminologi yang sering dipakai.

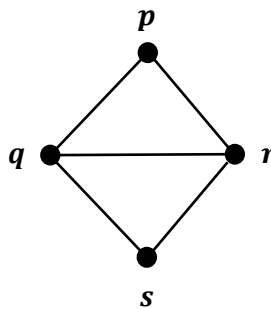
Definisi 2.29 (Munir, 2016)

Dua buah titik pada graf tak-berarah G dikatakan **bertetangga** (*adjacent*) bila keduanya terhubung langsung dengan sebuah sisi. Dengan kata lain, u bertetangga dengan v jika (u, v) adalah sebuah sisi pada graf G .

Berikut diberikan contohnya.

Contoh 2.33

Perhatikan graf berikut, titik p bertetangga dengan titik q dan r , tetapi titik p tidak bertetangga dengan titik s .

Gambar 2.18 Graf G_1

Pada graf berarah, sisi disebut busur. Jika (u, v) adalah busur maka u dikatakan bertetangga dengan v dan v dikatakan tetangga dari u . Pada Gambar 2.8, titik v_1 bertetangga dengan titik v_2 , dan titik v_2 dikatakan tetangga dari titik v_1 .

Selanjutnya diberikan definisi dari bersisian (*incident*) berikut ini.

Definisi 2.30 (Munir, 2016)

Untuk sebarang sisi $e = (u, v)$, sisi e dikatakan **bersisian** (*incident*) dengan titik u dan titik v .

Berikut diberikan contohnya.

Contoh 2.34

Pada Gambar 2.18, sisi (q, r) bersisian dengan titik q dan titik r , sisi (q, s) bersisian dengan titik q dan titik s , tetapi sisi (p, q) tidak bersisian dengan titik s . Selanjutnya diberikan definisi dari titik terpencil (*isolated vertex*) berikut ini.

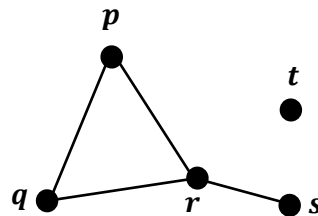
Definisi 2.31 (Munir, 2016)

Titik terpencil (*isolated vertex*) ialah titik yang tidak mempunyai sisi yang bersisian dengannya. Atau, dapat juga dinyatakan bahwa titik terpencil adalah titik yang tidak satupun bertetangga dengan titik-titik lainnya.

Berikut diberikan contohnya.

Contoh 2.35

Perhatikan graf berikut,



Gambar 2.19 Graf G_2

Pada Gambar 2.19, titik t adalah titik terpencil.

Selanjutnya diberikan definisi dari derajat (*degree*) berikut ini.

Definisi 2.32 (Munir, 2016)

Derajat (*degree*) suatu titik pada graf tak-berarah adalah jumlah sisi yang bersisian dengan titik tersebut.

Dinotasikan dengan $d(v)$ yang menyatakan derajat titik v .

Berikut diberikan contohnya.

Contoh 2.36

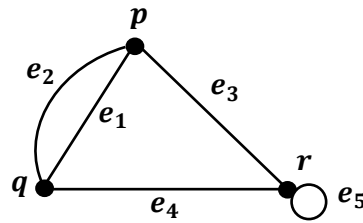
Pada Gambar 2.18,

$$d(p) = d(s) = 2$$

$$d(q) = d(r) = 3$$

Titik terpencil adalah titik dengan $d(v) = 0$, karena tidak ada satupun sisi yang bersisian dengan titik tersebut. Pada Gambar 2.19, $d(t) = 0$.

Sisi gelang (*loop*) dihitung berderajat dua. Berikut diberikan contohnya.



Gambar 2.20 Graf G_3

Jadi, untuk graf pada Gambar 2.20, $d(r) = 4$.

Secara umum, jika terdapat g buah gelang dan e buah sisi bukan gelang yang bersisian dengan titik v , maka derajat titik v adalah

$$d(v) = 2g + e \quad (2.1)$$

Alasan mengapa gelang berkontribusi dua untuk derajat titiknya adalah karena gelang direpresentasikan sebagai (v, v) , dan titik v bersisian dua kali pada sisi (v, v) .

Titik yang berderajat satu disebut **anting-anting** (*pendant vertex*). Dengan kata lain, anting-anting hanya bertetangga dengan sebuah titik. Pada Gambar 2.19, $d(s) = 1$, karena itu titik s adalah anting-anting.

Lemma 2.33 (Munir, 2016)

Jumlah derajat semua titik pada suatu graf adalah genap, yaitu dua kali jumlah sisi pada graf tersebut. Dengan kata lain, jika $G = (V, E)$, maka

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E| \quad (2.2)$$

Bukti:

Karena setiap sisi berkontribusi dua derajat, maka jumlah derajat dari semua titik dalam G adalah dua kali jumlah sisi dalam G . Jadi,

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E| \quad \blacksquare$$

Lemma ini dikenal dengan **lemma jabat tangan** (*handshaking lemma*). Hal ini disebabkan oleh setiap sisi dihitung dua kali, yaitu pada ujung kiri sebagai bagian dari titik kiri dan pada ujung kanan dihitung sebagai bagian dari titik kanan. Layaknya orang berjabat tangan, maka jumlah tangan yang berjabatan adalah genap dan jumlah tangan yang berjabatan adalah dua kali jumlah jabatan tangan yang terjadi. Berikut diberikan contohnya.

Contoh 2.37

Jumlah derajat seluruh titik pada graf Gambar 2.18 adalah:

$$d(p) + d(q) + d(r) + d(s) = 2 + 3 + 3 + 2 = 10 = 2 \times \text{jumlah sisi} = 2 \times 5$$

Jumlah derajat seluruh titik pada graf Gambar 2.19 adalah:

$$d(p) + d(q) + d(r) + d(s) + d(t) = 2 + 2 + 3 + 1 + 0 = 8 = 2 \times \text{jumlah sisi} = 2 \times 4$$

Jumlah derajat seluruh titik pada graf Gambar 2.20 adalah:

$$d(p) + d(q) + d(r) = 3 + 3 + 4 = 10 = 2 \times \text{jumlah sisi} = 2 \times 5$$

Contoh 2.38

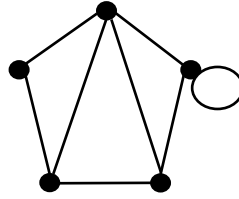
Diketahui graf dengan lima buah titik. Dapatkah kita menggambar untuk sebarang graf tersebut jika derajat masing-masing titik adalah:

- a) 2, 3, 1, 1, 2
- b) 2, 3, 3, 4, 4

Penyelesaian:

- a) Tidak dapat, karena jumlah derajat semua titiknya ganjil ($2 + 3 + 1 + 1 + 2 = 9$).
- b) Dapat, karena jumlah derajat semua titiknya genap ($2 + 3 + 3 + 4 + 4 = 16$).

Salah satu kemungkinan graf yang dapat digambar ditunjukkan pada Gambar 2.21 ternyata grafnya bukan graf sederhana.



Gambar 2.21 Graf dengan derajat titik masing-masing 2, 3, 3, 4, 4

Akibat dari lemma jabat tangan diatas kita menurunkan teorema berikut:

Teorema 2.34 (Munir, 2016)

Untuk sebarang graf G , banyaknya titik yang berderajat ganjil selalu genap.

Bukti:

Misalkan V_1 dan V_2 masing-masing adalah himpunan titik yang berderajat ganjil pada graf $G = (V, E)$. Persamaan (2.2) dapat ditulis sebagai

$$\sum_{v \in V_1} d(v) + \sum_{v \in V_2} d(v) = 2|E| \quad (2.3)$$

Karena $d(v)$ genap untuk $v \in V_1$, maka suku pertama dari ruas kiri persamaan selalu bernilai genap. Ruas kanan persamaan (2.3) juga bernilai genap. Nilai genap pada ruas kanan hanya benar bila suku kedua dari ruas kiri juga harus genap agar

$$\text{Genap} + \text{genap} = \text{genap}$$

Karena $d(v)$ ganjil untuk $v \in V_2$, maka banyaknya titik v di dalam V_2 harus genap agar jumlah seluruh derajatnya bernilai genap. Jadi, banyaknya titik yang berderajat ganjil selalu genap. ■

Perhatikan graf pada Gambar 2.19, disini banyaknya titik yang berderajat ganjil ada dua buah, yaitu titik r dan s .

Selanjutnya diberikan definisi dari lintasan (*path*) berikut ini.

Definisi 2.35 (Munir, 2016)

Lintasan (*path*) yang panjangnya n dari titik awal v_0 ke titik tujuan v_n di dalam graf G ialah barisan berselang-seling titik-titik dan sisi-sisi yang berbentuk

$v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, v_{n-1}, e_n, v_n$ sedemikian sehingga

$e_1 = (v_0, v_1), e_2 = (v_1, v_2), \dots, e_n = (v_{n-1}, v_n)$ adalah sisi-sisi dari graf G .

Sebagai contoh, pada Gambar 2.18, lintasan p, q, s, r adalah lintasan dengan barisan sisi $(p, q), (q, s), (s, r)$. Istilah lain untuk lintasan adalah jalur.

Titik dan sisi yang dilalui di dalam lintasan boleh berulang. Sebuah lintasan dikatakan **lintasan sederhana** (*simple path*) jika semua titiknya berbeda (setiap sisi yang dilalui hanya satu kali). Dari sini diberikan definisi dari lintasan tertutup dan lintasan terbuka.

Definisi 2.36 (Munir, 2016)

Lintasan yang berawal dan berakhir pada titik yang sama disebut **lintasan tertutup** (*closed path*).

Definisi 2.37 (Munir, 2016)

Lintasan yang tidak berawal dan berakhir pada titik yang sama disebut **lintasan terbuka** (*open path*).

Berikut diberikan contohnya.

Contoh 2.39

Perhatikan pada Gambar 2.18, diperoleh

Lintasan p, q, s, r adalah lintasan sederhana, juga lintasan terbuka.

Lintasan p, q, s, r, p adalah juga lintasan sederhana, juga lintasan tertutup.

Lintasan p, q, s, r, q bukan lintasan sederhana, tetapi lintasan terbuka.

Selanjutnya diberikan definisi dari panjang lintasan berikut ini.

Definisi 2.38 (Munir, 2016)

Panjang lintasan adalah jumlah sisi dalam lintasan tersebut.

Berikut diberikan contohnya.

Contoh 2.40

Lintasan p, q, s, r pada Gambar 2.18 memiliki panjang 3.

Selanjutnya diberikan definisi dari sirkuit berikut ini.

Definisi 2.39 (Wilson, 1996)

Lintasan tertutup yang mengandung setidaknya satu sisi adalah **sirkuit** (*circuit*) atau **siklus** (*cycle*).

Pada Gambar 2.18, p, q, r, p adalah sebuah sirkuit. Panjang sirkuit adalah jumlah sisi di dalam sirkuit tersebut. Sirkuit p, q, r, p pada Gambar 2.18 memiliki panjang

3. Sebuah sirkuit dikatakan **sirkuit sederhana** (*simple circuit*) jika setiap sisi yang dilalui berbeda.

Berikut diberikan contohnya.

Contoh 2.41

Pada Gambar 2.18, p, q, r, p adalah sirkuit sederhana, sedangkan p, q, s, r, q, p bukan sirkuit sederhana, karena sisi (p, q) dilalui dua kali.

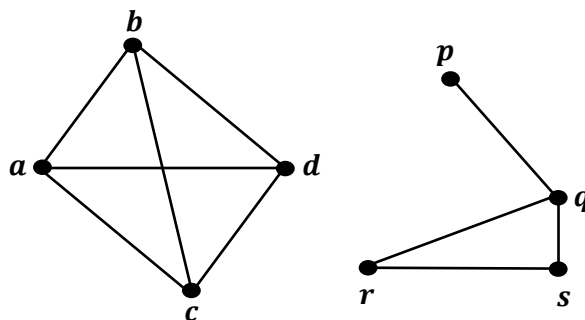
Keterhubungan dua buah titik adalah penting didalam graf. Dua buah titik u dan titik v dikatakan **terhubung** jika terdapat lintasan dari u ke v . Jika dua buah titik terhubung maka pasti titik yang pertama dapat dicapai dari titik yang kedua.

Jika setiap pasang titik di dalam graf terhubung, maka graf tersebut kita katakan graf terhubung. Secara formal, definisi graf terhubung adalah sebagai berikut:

Definisi 2.40 (Munir, 2016)

Graf tak-berarah G disebut **graf terhubung** (*connected graph*) jika untuk setiap pasang titik u dan v di dalam himpunan V terdapat lintasan dari u ke v (yang juga harus berarti ada lintasan dari v ke u). Jika tidak, maka G disebut **graf tak-terhubung** (*disconnected graph*).

Sebagai contoh, G_1 pada Gambar 2.18 dan G_3 pada Gambar 2.20 adalah graf terhubung, sedangkan G_2 pada Gambar 2.19 adalah graf tak-terhubung. Graf pada Gambar 2.22 dibawah ini juga adalah contoh dari graf yang tak-terhubung.



Gambar 2.22 Graf tak-berarah tak terhubung

Graf yang hanya terdiri atas satu titik saja (tidak ada sisi) tetap kita katakan terhubung, karena titik tunggalnya terhubung dengan dirinya sendiri juga dikatakan graf terhubung.

2.4 Pelabelan Total Tak Reguler Sisi

Di antara berbagai macam konsep dalam teori graf, salah satu konsep yang cukup populer adalah konsep mengenai pelabelan graf. Pelabelan graf pada dasarnya memberikan label berupa bilangan bulat positif pada elemen suatu graf yaitu titik, sisi atau kombinasinya dengan sifat dan aturan tertentu. Sebelum membahas mengenai pelabelan total tak reguler sisi pada graf, terlebih dahulu dibahas mengenai pelabelan pada graf. Berikut diberikan definisinya.

Definisi 2.41 (Wallis, 2001)

Pelabelan graf adalah suatu pemetaan (fungsi) yang memasangkan elemen-elemen dari graf ke suatu bilangan bulat. Dalam pelabelan tersebut, daerah asal dapat berupa himpunan semua titik di G saja, himpunan semua sisi di G saja atau merupakan gabungan dari keduanya, yang selanjutnya secara berturut-turut disebut sebagai pelabelan titik, pelabelan sisi dan pelabelan total.

Misalkan e adalah suatu sisi yang menghubungkan titik u dan v , maka e dapat ditulis $e = uv$. Bobot dari elemen pada graf adalah jumlah dari semua label yang berhubungan dengan elemen graf tersebut. Berikut diberikan definisi bobot sisi pada suatu graf.

Definisi 2.42 (Bača et al., 2007)

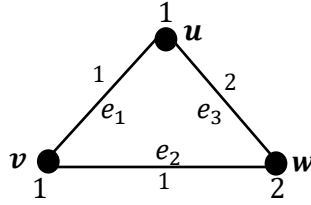
Bobot sisi $e = uv$ dengan suatu pelabelan total $f : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ sebagai berikut:

$$wt_f(e) = wt_f(uv) = f(u) + f(uv) + f(v)$$

Selanjutnya diberikan contoh bobot sisi pada suatu graf.

Contoh 2.42

Berikut merupakan contoh graf yang telah dilabeli,



Gambar 2.23 Pelabelan total pada C_3

Pada Gambar 2.23 adalah contoh pelabelan titik dan sisi atau pelabelan total pada graf berderajat 2. Diperoleh pelabelan setiap titik pada graf C_3 yaitu:

$$f(u) = 1, f(v) = 1 \text{ dan } f(w) = 2$$

sedangkan untuk pelabelan setiap sisi pada graf yaitu:

$$f(e_1) = 1, f(e_2) = 1 \text{ dan } f(e_3) = 2$$

selanjutnya bobot setiap sisinya adalah

$$wt_f(e_1) = 1 + 1 + 1 = 3, wt_f(e_2) = 1 + 1 + 2 = 4 \text{ dan } wt_f(e_3) = 1 + 2 + 2 = 5$$

Dengan memanfaatkan definisi bobot sisi, Bača et al. mendefinisikan suatu jenis pelabelan yang disebut pelabelan- k total tak reguler sisi.

Pelabelan total tak reguler sisi pada graf adalah pemberian label bilangan bulat positif pada himpunan titik dan himpunan sisi, dimana label yang diberikan boleh berulang, tetapi bobot untuk setiap sisinya berbeda. Berikut diberikan definisi dari pelabelan- k total tak reguler sisi.

Definisi 2.43 (Bača et al., 2007)

Suatu graf $G = (V(G), E(G))$ terdiri dari himpunan titik tak kosong $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$ yang mempunyai pelabelan $f : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ disebut pelabelan k total tak reguler sisi jika untuk setiap dua sisi $e_1 = u_1v_1$ dan $e_2 = u_2v_2$ yang berbeda di G , memiliki bobot sisi berbeda, yakni

$$wt_f(e_1) \neq wt_f(e_2)$$

dengan

$$wt_f(e_1) = f(u_1) + f(e_1) + f(v_1) \text{ dan } wt_f(e_2) = f(u_2) + f(e_2) + f(v_2)$$

Lebih lanjut, minimum nilai k sedemikian hingga G mempunyai pelabelan- k total tak reguler sisi, disimbolkan dengan $\text{tes}(G)$ dan disebut dengan kekuatan total tak reguler sisi graf G .

Berikut diberikan teorema batas bawah pada $\text{tes}(G)$ atau kekuatan total tak reguler sisi untuk sebarang graf, yang dikemukakan oleh Bača et al. yang dapat digunakan sebagai acuan untuk menentukan nilai $\text{tes}(G)$ dalam suatu pelabelan total tak reguler sisi.

Teorema 2.44 (Bača et al., 2007)

Misalkan untuk sebarang graf $G = (V(G), E(G))$ dengan himpunan titik $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$ yang tidak kosong, maka

$$\text{tes}(G) \geq \max \left\{ \left\lceil \frac{|E(G)| + 2}{3} \right\rceil, \left\lceil \frac{|\Delta(G)| + 1}{2} \right\rceil \right\}$$

dimana $\Delta(G)$ merupakan derajat maksimum di G .

Bukti.

Misalkan sebuah graf G yang terdiri dari himpunan titik $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$, dilabeli dengan label 1 untuk setiap titik pada graf G dan sisinya dilabeli secara berurutan dengan label $1, 2, \dots, |E(G)|$. Jika nilai label dinotasikan dengan f , maka nilai bobot untuk masing-masing sisi pada graf G adalah penjumlahan dari ketiga label :

$$wt_f(xy) = f(x) + f(y) + f(xy)$$

$$\leftrightarrow wt_f(xy) = 1 + 1 + i = 2 + i \text{ untuk } i = 1, 2, \dots, |E(G)|$$

Sehingga, setiap sisi yang berbeda memiliki bobot yang berbeda pula. Kemudian, misalkan f adalah pelabelan total tak reguler sisi. Perhatikan bahwa, bobot-bobot sisi $E(G)$ adalah $\{3, 4, \dots, 2 + |E(G)|\}$ secara berturut-turut dan saling berlainan. Oleh karena $|E(G)| + 2$ adalah penjumlahan tiga bilangan bulat positif yaitu,

penjumlahan dua label titik dan satu label sisi, maka terdapat label yang nilainya

paling sedikit adalah $\left\lceil \frac{|E(G)|+2}{3} \right\rceil$. Sehingga diperoleh $\left\lceil \frac{|E(G)|+2}{3} \right\rceil \leq \text{tes}(G)$.

Selanjutnya misalkan f merupakan pelabelan total tak reguler sisi pada G . Misal

$e_1, e_2, \dots, e_{\Delta}$ merupakan sisi-sisi yang insiden dengan titik x yang berderajat maksimum $\Delta(G)$. Misalkan y_i merupakan titik ujung dari sisi e_i yaitu $e_i = xy_i$.

Oleh karena $wt_f(e_i) = f(x) + f(e_i) + f(y_i)$ untuk setiap i , $1 \leq i \leq \Delta(G)$ dan karena $wt_f(e_1), wt_f(e_2), \dots, wt_f(e_{\Delta})$ berbeda, maka $f(e_i) + f(y_i)$ berbeda untuk $1 \leq i \leq \Delta(G)$. Jadi, nilai terbesar diantara bobot-bobotnya, paling tidak $\Delta(G)+1$.

Berarti, $f(e_i)$ atau $f(y_i)$ paling sedikit bernilai $\left\lceil \frac{|\Delta(G)|+1}{2} \right\rceil$. Sehingga diperoleh

$$\left\lceil \frac{|\Delta(G)|+1}{2} \right\rceil \leq \text{tes}(G).$$

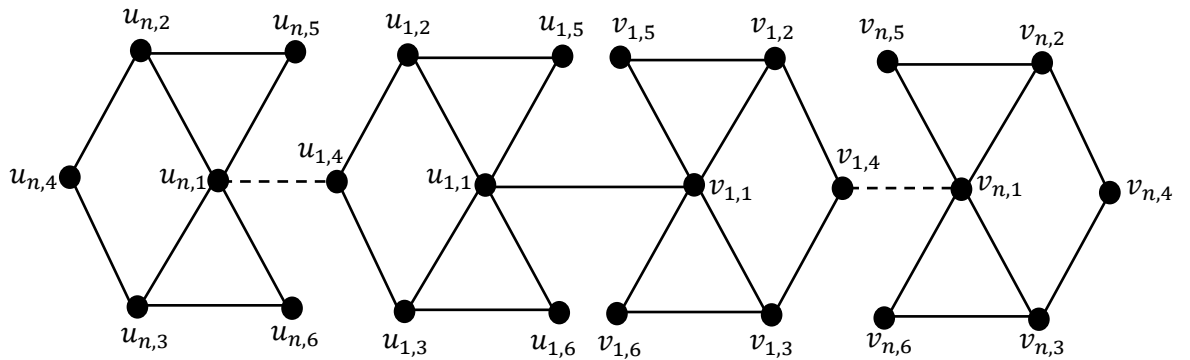
■

Berikut diberikan contoh dari kekuatan total tak reguler sisi pada suatu graf.

Contoh 2.43 (Setiawati et al., 2023)

Misalkan D_n merupakan graf *direction* ke- n , dengan $n \geq 1$ maka $\text{tes}(D_n) = 6n + 1$

Ilustrasi dari graf *direction* D_n dapat dilihat pada Gambar 2.24 berikut ini.



Gambar 2.24 Graf *direction* D_n

Untuk buktinya dapat dilihat pada sitasi (Setiawati et al., 2023).

BAB V PENUTUP

Berdasarkan hasil dan pembahasan pada bab sebelumnya, diperoleh ketitikan dan saran sebagai berikut.

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan penelitian yang telah dilakukan, diperoleh beberapa ketitikan yang dapat diambil sebagai berikut.

1. Nilai kekuatan total tak reguler sisi pada graf yang diteliti berhasil ditentukan dengan menggunakan teorema batas bawah pada $tes(G)$ yaitu graf berlian terhubung dengan $tes(Bt_n) = 6n$, graf *tower* dengan $tes(T_n) = 4n + 3$, graf parabola dengan $tes(Pr_n) = \left\lceil \frac{5n+3}{3} \right\rceil$ dan graf *eyeglasses* dengan $tes(Eg_n) = \left\lceil \frac{8n+11}{3} \right\rceil$.
2. Pelabelan pada graf berlian terhubung, graf *tower*, graf parabola dan graf *eyeglasses* dapat dilabeli dengan menggunakan metode pelabelan total tak reguler sisi, di mana setiap sisi memiliki bobot unik sesuai dengan aturan pelabelan total tak reguler sisi.

5.2 Saran

Pada tugas akhir ini, penulis telah melakukan penelitian terkait metode pelabelan total tak reguler sisi pada graf berlian terhubung, graf *tower*, graf parabola dan graf *eyeglasses*. Untuk penelitian selanjutnya, penulis menyarankan kepada pembaca agar dapat melanjutkan penelitian pada graf ini tetapi dengan menggunakan metode pelabelan graf yang lain atau dapat juga mencari bentuk graf yang baru dan menggunakan metode pelabelan yang sama.

DAFTAR PUSTAKA

- Adiwijaya. (2016). Matematika Diskrit dan Aplikasinya. *Alfabeta*, 47–73.
- Bača, M., Jendrol', S., Miller, M., & Ryan, J. (2007). On irregular total labellings. *Discrete Mathematics*, 307(11–12), 1378–1388. <https://doi.org/10.1016/j.disc.2005.11.075>
- Gallian, J. A. (2022). A Dynamic Survey of Graph Labeling. *Electronic Journal of Combinatorics*, 6(25), 4–623. <https://doi.org/10.37236/11668>
- Ivančo, J., & Jendrol', S. (2006). Total edge irregularity strength of trees. *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, 26(3), 449. <https://doi.org/10.7151/dmgt.1337>
- Khotimah, H., & Susanti, Y. (2019). Kekuatan Total Tak Reguler Sisi Graf Double Fan Dan Graf-Graf Terkait Graf Double Fan. *Jurnal Matematika Thales*, 1(1), 1–11. <https://doi.org/10.22146/jmt.34283>
- Majid, C. A., Wijayanti, D. E., Thobirin, A., & Prasetyo, P. W. (2023). Pelabelan Jarak Tak Teratur Titik Pada Graf Persahabatan Lengkap Diperumum. *Limits: Journal of Mathematics and Its Applications*, 20(1), 11. <https://doi.org/10.12962/limits.v20i1.7917>
- Marsudi. (2016). *TEORI GRAF*. UB Press. https://books.google.co.id/books?id=CwNODwAAQBAJ&pg=PA140&dq=Teori+Graf&hl=id&newbks=1&newbks_redir=0&source=gb_mobile_search&ovdme=1&sa=X&ved=2ahUKEwjag_q19feIAxXUSmwGHcsuB3UQ6AF6BAgHEAM
- Maulani, A. (2023). *teori graf – Anggi* (Issue 1). <https://anggigeo.wordpress.com/tag/teori-graf/>
- Munir, R. (2010). *MATEMATIKA DISKRIT* (Revisi Kee). Informatika Bandung. [https://www.bing.com/ck/a?!&=&p=3df5ec4ceed40dc75fd12474d14f8bd9ffc1300cf51b5403ddb870c54a6d3531JmltdHM9MTczMDg1MTIwMA&ptn=3&ver=2&hsh=4&fclid=09745850-02e8-69a7-0961-4c2c03ad68ac&psq=Munir%2C+R.+\(2010\).+Matematika+Diskrit%2C+Ed.+3.+Bandung%3A+Informatika+](https://www.bing.com/ck/a?!&=&p=3df5ec4ceed40dc75fd12474d14f8bd9ffc1300cf51b5403ddb870c54a6d3531JmltdHM9MTczMDg1MTIwMA&ptn=3&ver=2&hsh=4&fclid=09745850-02e8-69a7-0961-4c2c03ad68ac&psq=Munir%2C+R.+(2010).+Matematika+Diskrit%2C+Ed.+3.+Bandung%3A+Informatika+)
- Munir, R. (2016). *MATEMATIKA DISKRIT* (Revisi Kee). Informatika Bandung. <https://online.flipbuilder.com/unindrapustaka/fwka/>
- Paryanti, R., & Thobirin, A. (2011). Penerapan Teori Graf untuk Mencari Lintasan Tercepat Bus Trans-Jogja(Rosyana Paryanti) Penerapan Teori Graf untuk Mencari Lintasan Tercepat Bus Trans-Jogja. *Universitas Ahmad Dahlan*, 1–9.
- Rahayuningsih, S. (2018). Teori Graph dan Penerapannya. *Program Studi Pendidikan Matematika IKIP Budi Utomo Malang*, 1–151. <https://sriahayuningsih82.wordpress.com/wp-content/uploads/2019/02/buku-ajar-teori-graph.pdf>
- Sancoko, S. D., Fatimah, M. F., & Susanti, Y. (2017). Kekuatan Tak Reguler Sisi

- Total Pada Graf Umbrella dan Graf Fraktal. *Seminar Matematika*, 37–42.
- Setiawati, J., Meryta Febrilian Fatimah, & Ekawati, D. (2023). Pelabelan Total Tak Reguler Sisi pada Graf Direction, Graf Direction Right, dan Graf Heart. *Proximal: Jurnal Penelitian Matematika Dan Pendidikan Matematika*, 6(2), 64–72. <https://doi.org/10.30605/proximal.v6i2.2559>
- Susanti, Y., Indah Puspitasari, Y., & Khotimah, H. (2020). On total edge irregularity strength of staircase graphs and related graphs. *Iranian Journal of Mathematical Sciences and Informatics*, 15(1), 1–13. <https://doi.org/10.29252/ijmsi.15.1.1>
- Wallis, W. D. (2001). *Magic Graphs*. Boston : Birkhauser. <https://archive.org/details/magicgraphs0000wall/page/n5/mode/2up>
- Widiantoro, G. A., & Rosyida, I. (2020). Nilai Ketakteraturan Sisi Total Pada Graf Rantai Hendecagon Dengan Satu Sisi Pendant. *Ujme*, 3(2), 4–7. <http://journal.unnes.ac.id/sju/index.php/ujme>
- Wilson, R. J. (1996). Introduction to Graph Theory. In *Longman* (4th ed., Vol. 44, Issue 8). <https://doi.org/10.1088/1751-8113/44/8/085201>