SKRIPSI

MODEL PENYEBARAN PENYAKIT ANTRAKS DENGAN PERBAIKAN MANAJEMEN TERNAK

RINI RENGGAWATI
E0121010

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS SULAWESI BARAT
TAHUN 2024

SKRIPSI

MODEL PENYEBARAN PENYAKIT ANTRAKS DENGAN PERBAIKAN MANAJEMEN TERNAK

RINI RENGGAWATI
E0121010

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS SULAWESI BARAT
TAHUN 2024

SKRIPSI

MODEL PENYEBARAN PENYAKIT ANTRAKS DENGAN PERBAIKAN MANAJEMEN TERNAK

Diajukan sebagai salah satu syarat memperoleh gelar Sarjana pada Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Sulawesi Barat

RINI RENGGAWATI
E0121010

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS SULAWESI BARAT
TAHUN 2024

HALAMAN PENGESAHAN

Skripsi ini diajukan oleh:

Nama	:	Rini Renggawati
NIM	:	E0121010
Judul Penelitian	:	Model Penyebaran Penyakit Antraks dengan Perbaikan Manajemen Ternak

Telah berhasil dipertahankan di depan Tim Penguji (SK Nomor: 75/UN55.7/HK.04/2024, tanggal 1 Oktober 2024) dan diterima sebagai bagian persyaratan gelar Sarjana S1 Matematika pada Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Sulawesi Barat.

Disahkan Oleh:

Dekan FMIPA
Universitas Sulawesi Barat

Musafira, S.Si., M.Sc
NIP. 197709112006042002

Tim Penguji:

Ketua Penguji	: Musafira, S.Si., M.Sc	(..........................)
Sekretaris	: Ahmad Ansar, S.Pd., M.Sc	(..........................)
Pembimbing 1	: Dr. Wahyudin Nur, S.Si., M.Si	(..........................)
Pembimbing 2	: Ahmad Ansar, S.Pd., M.Sc	(..........................)
Penguji 1	: Fardinah, S.Si., M.Sc	(..........................)
Penguji 2	: Darmawati, S.Si., M.Si	(..........................)
Penguji 3	: Meryta Febrilian Fatimah, S.Si., M.Sc	(..........................)

ABSTRAK

Antraks merupakan penyakit menular pada ternak dengan tingkat kematian yang cukup tinggi, sehingga perlu dilakukan pencegahan dan penanggulangan penyebarannya. Tujuan dari penelitian ini adalah untuk mengkaji model penyebaran penyakit antraks dalam suatu populasi ternak dengan mempertimbangkan perbaikan manajemen ternak, yaitu efek penyemprotan disinfektan, vaksinasi, dan pengobatan. Selain itu, dipertimbangkan pula adanya transmisi langsung melalui ternak infeksius dan transmisi tak langsung melalui objek yang telah terkontaminasi spora antraks. Analisis dinamik yang dilakukan pada model meliputi penentuan titik kesetimbangan, bilangan reproduksi dasar $\left(R_0\right)$, syarat eksistensi titik kesetimbangan, dan analisis kestabilan lokal. Hasil analisis menunjukkan terdapat dua titik kesetimbangan, yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik yang eksis bersyarat. Titik kesetimbangan bebas penyakit bersifat stabil asimtotik lokal jika memenuhi kriteria Routh-Hurwitz dan $R_0 < 1,$ sedangkan titik kesetimbangan endemik bersifat stabil asimtotik lokal jika memenuhi kriteria Routh-Hurwitz. Hasil simulasi numerik menunjukkan bahwa semakin besar laju kematian spora akibat penyemprotan disinfektan, proporsi vaksinasi, dan laju kesembuhan karena pengobatan, maka semakin kecil tingkat penyebaran penyakit antraks.

Kata Kunci: Antraks, analisis kestabilan, disinfektan, vaksinasi, pengobatan

ABSTRACT

Anthrax is a contagious disease in livestock with a high mortality rate, so it is necessary to prevent and control its spread. The purpose of this study is to examine the anthrax disease spread model in a livestock population by considering improvements in livestock management, namely the effects of disinfectant spraying, vaccination, and treatment. In addition, direct transmission through infectious livestock and indirect transmission through objects contaminated with anthrax spore are considered. The dynamic analysis performed on the model includes the determination of equilibrium points, basic reproduction numbers (R_0)*, conditions for the existence of equilibrium points, and local stability analysis. The results of the analysis show that there are two equilibrium points, namely the disease-free equilibrium point and the conditionally existing endemic equilibrium point. The disease-free equilibrium point is locally asymptotically stable if it satisfies the Routh-Hurwitz criteria and* $R_0 < 1,$ *while the endemic equilibrium point are locally asymptotically stable if it satisfies the Routh-Hurwitz criteria. Numerical simulation results show that the greater the spore mortality rate due to disinfectant spraying, the proportion of vaccination, and the recovery rate due to treatment, the smaller the spread of anthrax disease.*

Keywords: *Anthrax, stability analysis, disinfectant, vaccination, treatment.*

BAB I
PENDAHULUAN

Pada bab ini dibahas tentang latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, dan manfaat penelitian yang dilakukan.

1.1 Latar Belakang

Penyakit antraks merupakan penyakit yang disebabkan oleh bakteri antraks pembentuk spora (*Bacillus anthracis*). Penyakit antraks tidak hanya menyerang ternak dan satwa liar, tetapi juga dapat menginfeksi manusia. Di antara hewan ternak, sapi dan domba lebih rentan dibandingkan kambing dan kuda, sedangkan babi kerdil dan ras domba Aljazair relatif tahan terhadap penyakit ini. Antraks merupakan penyakit yang dapat menular dari hewan ke manusia (*zoonosis*). Antraks pada hewan dapat terjadi dalam bentuk preakut, akut, dan kronis (Adji & Natalia, 2006). Selain itu, manusia juga dapat tertular penyakit antraks terutama yang bekerja di bidang peternakan. Antraks dapat menular ke manusia melalui beberapa cara, seperti melalui kontak langsung dengan hewan yang terinfeksi saat menguliti dagingnya, dan melalui konsumsi daging atau air minum yang terkontaminasi spora antraks. Misalnya kasus antraks yang terjadi di Gunungkidul, Kabupaten Yogyakarta, sedikitnya 9 hewan ternak diduga terjangkit penyakit antraks, 11 warga terjangkit penyakit tersebut, dan 1 meninggal karena dugaan antraks. Hal ini disebabkan oleh sebagian hewan ternak mati secara mendadak, kemudian disembelih dan dagingnya dikonsumsi oleh warga (Yuwono, 2020). Pada manusia infeksi antraks terjadi dalam tiga bentuk yaitu kulit (*cutanrous*), pernafasan (*inhalation*), dan pencernaan (*gastrointestinal*). Antraks kulit (*cutanrous*) yang paling umum terjadi. Ada juga bentuk meningitis, namun sangat jarang dan biasanya merupakan komplikasi yang awalnya berasal dari kulit, namun jika tidak diobati maka akan menyebar ke lapisan otak (Bhat dkk, 1989).

Antraks juga dapat memberikan dampak negatif terhadap perekonomian, perdagangan, sosial politik, dan keamanan suatu negara karena endospora bakteri tersebut berpotensi digunakan sebagai senjata biologi (*biological weapon/bioterrorism).* Daerah yang terkena penyakit antraks biasanya memiliki tanah yang bersifat basa dan kaya bahan organik (Yakin, 2010). Sumber utama infeksi bakteri adalah tanah dan udara. Faktor yang mempercepat penyebaran penyakit antraks adalah musim panas, kekurangan makanan, dan kelelahan (Astiti, 2010). Antraks terdapat hampir di seluruh negara Afrika dan Asia, beberapa negara di bagian Eropa, beberapa di bagian Amerika Serikat, dan beberapa wilayah di Australia (Adji & Natalia, 2006). Di Indonesia saat ini tersebar di 13 provinsi, yaitu: Jawa Tengah, DKI Jakarta, Jawa Barat, NTB, NTT, Sumatera Barat, Jambi, Sulawesi Tenggara, Sulawesi utara, Sulawesi Selatan, DI Yogyakarta, Papua dan Jawa Timur (Kemenkes RI., 2017). Penyakit ini pertama kali dilaporkan di Teluk Betung, pada tahun 1884.

Pencegahan penyakit antraks pada hewan ternak perlu dilakukan secara rutin dan berkesinambungan. Kerjasama dengan pihak berwenang dan dinas peternakan setempat penting dalam mencegah dan mengendalikan antraks. Langkah-langkah biosekuriti yang ketat termasuk menyediakan halaman rumput yang bersih, membeli makanan dari sumber yang dapat dipercaya, menggunakan disinfeksi (larutan natrium hipoklorit aktif/pemutih aktif 1% dalam air) di pintu masuk, mencuci tangan dengan sabun dan air antibakteri atau non-antibakteri, dan menggunakan sarung tangan saat menangani satwa. Vaksinasi rutin membantu mengendalikan penyakit pada ternak yang rentan dan pengobatan terhadap ternak yang telah terinfeksi (Kemenkes RI, 2017)

Penyebaran penyakit menular dapat dimodelkan secara matematis dengan tujuan memprediksi pola penularan penyakit dan menentukan tindakan yang efektif. Oleh karena itu, upaya pengendalian antraks pada hewan ternak dapat dilakukan melalui pendekatan preventif dan terapeutik (Prawandani, 2020). Terdapat beberapa matematikawan yang telah mengembangkan model terkait penyebaran antraks antara lain dalam paper yang ditulis oleh Friedmann dan Yakubu (2013) mengembangkan persamaan diferensial parsial penyebaran antraks pada populasi hewan dibangun dengan memperhitungkan faktor imigrasi, hewan pemakan bangkai dan laju kelahiran secara logistik pada hewan yang rentan. Selanjutnya, Mushayabasa dkk (2015) mengembangkan model penularan antraks dengan mempertimbangkan populasi hewan dan populasi spora antraks. Sinkie dan Narasimha (2016) kemudian mengembangkan model berdasarkan Mushayabasa (2015) dengan mempertimbangkan keberadaan populasi hewan yang terinfeksi antraks, Saad dkk (2017) mengembangkan model dari Friedman dan Yakubu (2013) dengan mempertimbangkan adanya laju pembusukan bangkai dan laju kesembuhan hewan dari penyakit antraks dan Ratianingsih (2019) mempelajari dinamika populasi penularan antraks melalui vaksinasi dan kasus infeksi pada manusia. Kemudian, Mackey dan Kribs (2021) mempelajari penyebaran antraks pada zebra, Prawandani dkk (2020) mempelajari dinamika populasi penularan antraks dengan menggunakan vaksinasi dan pengobatan, dan Sugiarto dkk (2023) mempelajari dinamika populasi penularan antraks dengan mempertimbangkan penggunaan vaksinasi pada individu rentan, karantina, dan pengobatan terhadap individu terinfeksi.

Berdasarkan latar belakang diatas, penulis tertarik untuk mengkaji dan memodifikasi model yang telah dibangun oleh beberapa peneliti sebelumnya. Peneliti sebelumnya belum menganalisis model penularan antraks pada hewan ternak dengan mempertimbangkan transmisi langsung, transmisi tak langsung, dan perbaikan manajemen ternak. Oleh karena itu, dalam penelitian ini dianalisis model penyebaran penyakit antraks dengan mempertimbangkan transmisi langsung, transmisi tak langsung, dan perbaikan manajemen ternak, yang meliputi efek penyemprotan disinfektan, vaksinasi, dan pengobatan. Transmisi langsung terjadi ketika ternak yang sehat bersentuhan dengan cairan tubuh, darah, atau jaringan ternak infeksius, sedangkan transmisi tak langsung terjadi ketika ternak terpapar spora *Bacillus anthracis* melalui kontak dengan objek atau bahan yang terkontaminasi, seperti tanah atau peralatan ternak. Hal ini memungkinkan untuk memahami transmisi penyebaran antraks dan perbaikan manajemen ternak, yang meliputi efek penyemprotan disinfektan, vaksinasi, dan pengobatan terhadap dinamika penularan penyakit antraks dalam kelompok ternak.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah dijelaskan di atas, maka diperoleh rumusan masalah sebagai berikut:

1. Bagaimana model matematika penularan penyakit antraks yang mempertimbangkan transmisi penyebaran antraks dan perbaikan manajemen ternak?
2. Bagaimana analisis dinamik model penyebaran penyakit antraks yang mempertimbangkan transmisi penyebaran antraks dan perbaikan manajemen ternak?
3. Bagaimana hasil simulasi numerik dan interpretasi model penyebaran penyakit antraks yang mempertimbangkan transmisi penyebaran antraks dan perbaikan manajemen ternak?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas, maka tujuan penelitian yang ingin dicapai dalam penulisan ini adalah sebagai berikut:

1. Mengonstruksi model matematika dari penularan penyakit antraks yang mempertimbangkan transmisi penyebaran antraks dan perbaikan manajemen ternak.
2. Melakukan analisis dinamik model penyebaran penyakit antraks yang mempertimbangkan transmisi penyebaran antraks dan perbaikan manajemen ternak.
3. Melakukan simulasi numerik model penyebaran penyakit antraks yang mempertimbangkan transmisi penyebaran antraks dan perbaikan manajemen ternak, serta menginterpretasikan hasilnya.

1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Memberikan informasi tentang pengaruh transmisi penyebaran antraks dan perbaikan manajemen ternak terhadap model penyebaran penyakit antraks.

2. Mengembangkan model penyebaran penyakit antraks yang dapat membantu dalam merumuskan kebijakan pengendalian penyakit yang efektif.
3. Berkontribusi terhadap pengembangan ilmu pengetahuan di bidang peternakan.

1.5 Batasan Masalah

Berdasarkan rumusan masalah di atas, maka penelitian ini memiliki batasan masalah yaitu populasi dibatasi hanya pada populasi sapi.

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini akan dibahas tentang pemodelan matematika, persamaan dan sistem persamaan diferensial, nilai eigen dan vektor eigen, linearisasi, matriks Jacobian, kriteria Routh-Hurwitz, analisis kestabilan titik kesetimbangan, bilangan reproduksi dasar, serta penyakit antraks merupakan teori yang digunakan untuk membantu memahami persoalan yang dibahas dalam Tugas Akhir ini.

2.1 Pemodelan Matematika

Pemodelan matematika merupakan penyusunan suatu deskripsi dari beberapa perilaku dunia nyata (fenomena-fenomena alam) ke dalam bagian matematika yang disebut dunia matematika. Model matematika ada dua jenis, yaitu model deterministik dan model empirik. Model deterministik adalah model matematika yang didasarkan pada hukum atau sifat yang berlaku pada sistem. Sedangkan model empirik adalah ilmu yang berdasarkan observasi dan hasilnya tidak bersifat spekulatif (Jusrawati, 2018).

Menurut Pagalay (2009), dalam pembuatan model memerlukan beberapa langkah untuk membuat model yang reliabel. Secara umum, langkah-langkah tersebut sebagai berikut:

1. Identifikasi Masalah

   Langkah ini bertujuan untuk mengidentifikasi dan memahami masalah yang akan dirumuskan. Identifikasi yang tepat memastikan bahwa fokus model sesuai dengan tujuan penelitian dan kebutuhan yang diharapkan.
2. Menentukan asumsi

   Asumsi diperlukan karena model merupakan penyederhanaan realistis dari suatu struktur kompleks. Kompleksitas masalah dapat disederhanakan dengan mengasumsikan hubungan sederhana antar variabel.
3. Mengonstruksi model

   Pembuatan model dapat dilakukan melalui hubungan fungsional dengan membuat diagram alir, melalui rumus yang ditentukan dengan menggunakan *software,* atau secara analisis.

4. Menganalisis model

   Tujuan dari fase ini untuk menemukan solusi yang tepat untuk menjawab pertanyaan yang diajukan pada fase identifikasi. Pada tahap pemodelan, analisis dapat dilakukan dengan dua cara, yaitu melalui optimasi dan simulasi. Optimasi bertujuan untuk mencari solusi atas apa yang seharusnya terjadi, dan simulasi bertujuan untuk mencari solusi atas apa yang akan terjadi.

5. Interpretasi

   Setelah analisis dilakukan, hasil model harus diinterpretasikan. Ini penting untuk menilai apakah hasil model rasional dan dapat diterima. Interpretasi membantu memahami keterkaitan antar variabel serta dampaknya.

6. Validasi

   Sebelum suatu model dapat digunakan untuk menjelaskan kejadian di dunia nyata, validitas model harus diuji. Model yang valid tidak hanya mengikuti prinsip teoritis yang valid tetapi juga memberikan interpretasi hasil diperoleh mendekati kesesuaian. Jika sebagian besar kriteria validitas dapat dipenuhi, maka model dapat diimplementasikan. Sebaiknya jika tidak, maka konstruksi model harus didesain ulang.

7. Implementasi

   Apabila hasil validasi memenuhi syarat dan rasional, maka hasilnya diterima. Kemudian dapat diimplementasikan berdasarkan model yang diperoleh.

2.2 Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Nilai eigen digunakan untuk mengetahui kestabilan dari suatu sistem persamaan diferensial. Berikut definisi dari nilai eigen dan vektor eigen.

Definisi 2.2.1 (Yuliani dkk, 2016)

Misalkan A adalah matriks berukuran $n \times n$ dengan entri-entri bilangan real, maka vektor tak nol $\vec{X}$ di dalam $\mathbb{R}^n$ dinamakan vektor eigen (*eigenvector*) dari A jika $A\vec{X}$ adalah kelipatan skalar dari $\vec{X}$ yaitu $A\vec{X} = \lambda\vec{X}$ untuk suatu skalar λ. Skalar

λ dinamakan nilai eigen dari A dan $\vec{X}$ dikatakan vektor eigen yang bersesuaian dengan λ.

Untuk mencari nilai-nilai eigen Matriks A yang berukuran $n \times n$ maka dapat dituliskan kembali $A\vec{X} = \lambda\vec{X}$ sebagai

$$\begin{aligned} A\vec{X} &= \lambda\vec{X} \\ A\vec{X} &= \lambda I\vec{X} \\ (\lambda I - A)\vec{X} &= 0 \end{aligned} \tag{2.1}$$

agar λ menjadi nilai eigen maka haruslah ada solusi tak nol dari persamaan (2.1), dengan I adalah matriks identitas.

Teorema 2.3.1 (Anton H., 2010)

Jika A adalah matriks berukuran $n \times n$ dengan entri-entri bilangan real, maka λ adalah nilai eigen dari A jika dan hanya jika memenuhi persamaan

$$|\lambda I - A| = 0 \tag{2.2}$$

yang disebut persamaan karakteristik dari A.

Contoh 2.2.1

Diberikan matriks $A = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$. Tentukan nilai eigen dan vektor eigen dari matriks A!

Penyelesaian:

Nilai eigen dari matriks A diperoleh dengan cara berikut

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$\left| \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = 0$$

$$\left|\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\right| = 0$$

$$\left|\begin{pmatrix} 4-\lambda & -5 \\ 2 & -3-\lambda \end{pmatrix}\right| = 0$$

$$\Leftrightarrow (4-\lambda)(-3-\lambda)-(-5)(2)=0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2+3\lambda-4\lambda-12+10=0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2-\lambda-2=0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda+1)(\lambda-2)=0$$

Sehingga diperoleh nilai-nilai eigen dari matriks A yaitu

$$\lambda_1=-1 \text{ dan } \lambda_2=2$$

Untuk $\lambda_1=-1$, maka

$$(A-\lambda I)\vec{X}=0$$

$$\begin{bmatrix} 4-(-1) & -5 \\ 2 & -3-(-1) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dengan melakukan operasi baris elementer, diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Akibatnya,

$$\begin{aligned} x_1-x_2 &= 0 \\ x_1 &= x_2 \end{aligned}$$

Misalkan $x_2=t$

diperoleh himpunan vektor eigen sebagai berikut:

$$\vec{k}_1=\left\{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} t, t\in\mathbb{R}\right\}$$

Jadi untuk $\lambda_1 = -1$, maka salah satu vektor eigennya yaitu $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Untuk $\lambda_2 = 2$, maka

$$(A - \lambda I)\vec{X} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 4-2 & -5 \\ 2 & -3-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dengan melakukan operasi baris elementer, diperoleh

$$\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Akibatnya,

$$\begin{aligned} 2x_1 - 5x_2 &= 0 \\ x_1 &= \frac{5}{2}x_2 \end{aligned}$$

Misalkan

$$\begin{aligned} x_2 &= t \\ x_1 &= \frac{5}{2}t \end{aligned}$$

diperoleh himpunan vektor eigen sebagai berikut:

$$\vec{k}_2 = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{2}t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} \\ 1 \end{bmatrix} t, t \in \mathbb{R} \right\}$$

Jadi untuk $\lambda_2 = 2$, maka salah satu vektor eigennya yaitu $\begin{bmatrix} \frac{5}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$.

2.3 Persamaan Diferensial

Adapun definisi dari persamaan diferensial diberikan sebagai berikut:

Definisi 2.3.1 (Toaha S., 2013)

Persamaan diferensial adalah persamaan yang melibatkan turunan satu atau lebih variabel tak bebas terhadap satu atau lebih variabel bebas.

Berdasarkan jumlah variabel bebas yang terlibat, persamaan diferensial diklasifikasikan menjadi dua yaitu persamaan diferensial biasa dan persamaan diferensial parsial. Berikut ini merupakan definisi dari persamaan diferensial biasa.

Definisi 2.3.2 (Toaha S., 2013)

Persamaan diferensial biasa yaitu suatu persamaan diferensial yang melibatkan turunan dari satu atau lebih variabel tak bebas terhadap satu variabel bebas.

Berdasarkan sifat kelineararannya, persamaan diferensial biasa dibedakan menjadi persamaan diferensial biasa linier dan persamaan diferensial biasa nonlinear.

Adapun bentuk umum persamaan diferensial biasa linear yaitu:

$$a_n(t)\frac{d^n x}{dt^n} + a_{(n-1)}(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + ... + a_n(t)\frac{dx}{dt} + a_0(t)x = f(t) \qquad (2.3)$$

dengan $a_n \neq 0, a_n, a_{n-1}, ..., a_0$ disebut koefisien persamaan diferensial.

Jika $f(t)$ bernilai nol untuk semua nilai t dalam interval yang ditinjau maka persamaan dikatakan homogen dan sebaliknya dikatakan non-homogen.

Contoh 2.3.1

Tentukan solusi persamaan diferensial biasa berikut!

$$\frac{dx}{dt} + \frac{2x}{t} = 10t^2$$

Penyelesaian:

$$a_0(t) = \frac{2}{t},\ f(t) = 10t^2$$

Faktor integrasinya:

$$\mu(t) = e^{\int \frac{2}{t}dt} = e^{2\ln(t)} = e^{\ln(t)^2} = t^2$$

Kalikan $f(t) = 10t^2$ dengan $\mu(t) = t^2$ dan integralkan, sehingga diperoleh

$$\mu(t)\,y = \int \mu(t)\, f(t)\,dt = \int t^2 10t^2 dt = 10t^4 + c$$

Jadi, solusi umumnya adalah

$$t^2x = 10t^4 + c$$

$$t^2x - 10t^4 = c$$

Definisi 2.3.3 (Saputri R., 2017)

Persamaan diferensial parsial yaitu suatu persamaan diferensial yang melibatkan turunan dari satu atau lebih variabel tak bebas terhadap dua atau lebih variabel bebas.

Definisi 2.3.4 (Evans, 2022)

Diberikan fungsi $u : U \to \mathbb{R}$ dengan $U \subset \mathbb{R}^n$.

Sebuah vektor dengan bentuk $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, di mana setiap komponen α_i adalah sebuah bilangan bulat non-negatif, disebut sebuah multi indeks dengan orde

$$|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n.$$

Diberikan sebuah multi indeks α, didefinisikan

$$D^\alpha u(x) := \frac{\partial^{|\alpha|} u(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_n}^{\alpha_n} u.$$

Jika k adalah sebuah bilangan bulat non-negatif,

$$D^k u(x) := \left\{ D^\alpha u(x) \,\|\, \alpha \,|= k \right\},$$

adalah himpunan semua turunan-turunan parsial orde k.

Dengan memberikan beberapa urutan pada berbagai turunan parsial, juga bisa menganggap $D^k u(x)$ sebagai sebuah titik di $\mathbb{R}^{n^k}$.

Definisi 2.3.5 (Evans, 2022)

Diberikan fungsi $F : \mathbb{R}^{n^k} \times \mathbb{R}^{n^{k-1}} \times \cdots \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times U \to \mathbb{R}$ dengan $U \subset \mathbb{R}^n$.

Sebuah ekspresi dari bentuk

$$F\left(D^k u(x), D^{k-1}u(x), \ldots, Du(x), u(x), x\right) = 0 \quad (x \in U) \tag{2.4}$$

disebut persamaan diferensial parsial orde k dengan $k \in \mathbb{Z}^+$.

Contoh 2.3.2

Contoh persamaan diferensial parsial:

a. $F\left(\dfrac{\partial u}{\partial x_1}, \dfrac{\partial u}{\partial x_2}, u, x_1, x_2\right) = \dfrac{\partial u}{\partial x_1} + \dfrac{\partial u}{\partial x_2} = 0$

b. $F\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1{}^2}, \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2{}^2}, \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1}, \dfrac{\partial u}{\partial x_1}, \dfrac{\partial u}{\partial x_2}, u, x_1, x_2\right) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1{}^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2{}^2} = 0$

Berdasarkan Definisi 2.3.3, maka contoh 2.3.2 (a) dan 2.3.2 (b) merupakan persamaan diferensial parsial karena melibatkan dua variabel bebas.

2.4 Sistem Persamaan Diferensial

Secara umum suatu sistem persamaan diferensial orde pertama berdimensi *n* mempunyai bentuk sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= f_1\left(t, x_1, x_2, ..., x_n\right) \\
\frac{dx_2}{dt} &= f_2\left(t, x_1, x_2, ..., x_n\right) \\
&\vdots \\
\frac{dx_n}{dt} &= f_n\left(t, x_1, x_2, ..., x_n\right)
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Sistem persamaan diferensial berdimensi n adalah gabungan dari n buah persamaan diferensial dengan n buah fungsi tak diketahui. Dalam hal ini, $n \geq 2$. Sistem persamaan diferensial juga dibedakan menjadi sistem persamaan diferensial linear dan sistem persamaan diferensial tak linear (Intan Juliah, 2015).

2.4.1 Sistem Persamaan Diferensial Linear

Bentuk umum sistem persamaan diferensial linear sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + ... + a_{1n}(t)x_n + f_1(t) \\
\frac{dx_2}{dt} &= a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + ... + a_{2n}(t)x_n + f_2(t) \\
&\vdots \\
\frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + ... + a_{nn}(t)x_n + f_n(t)
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Sistem persamaan diferensial linear berdimensi dua berbentuk:

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + f_1(t) \\
\frac{dx_2}{dt} &= a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + f_1(t)
\end{aligned} \tag{2.7}$$

dimana fungsi f_1 dan f_2 merupakan fungsi t yang kontinu pada suatu selang I, sedangkan x_1 dan x_2 adalah fungsi yang tak diketahui (Candra, 2010).

Contoh 2.4.1

Tentukan solusi sistem persamaan diferensial berikut!

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= 4x_1 - 5x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= 2x_1 - 3x_2 \end{aligned} \tag{2.8}$$

Penyelesaian:

Nyatakan sistem (2.8) dalam bentuk notasi matriks dan vektor, yaitu

$$\frac{d\vec{X}}{dt} = A\vec{X}$$

dengan $A = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ dan $\vec{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$.

berdasarkan contoh 2.3.1 diperoleh nilai eigen matriks *A* dan vektor eigen yang bersesuaian dengan masing-masing nilai eigen sebagai berikut:

Untuk $\lambda_1 = -1$, maka salah satu vektor eigennya yaitu $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Untuk $\lambda_2 = 2$, maka salah satu vektor eigennya yaitu $\begin{bmatrix} \frac{5}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$.

Maka diperoleh solusi sistem (2.8) sebagai berikut:

$$\vec{X} = c_1\vec{k}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2\vec{k}_2 e^{\lambda_2 t}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{bmatrix} \frac{5}{2} \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t}$$

dengan c_1 dan c_2 adalah konstanta.

2.4.2 Sistem Persamaan Diferensial Nonlinear

Bentuk umum sistem persamaan diferensial otonomus adalah

$$\frac{d\vec{X}}{dt} = \vec{f}\left(\vec{X}\right) \tag{2.9}$$

dengan $\vec{f} : E \to \mathbb{R}^n$ dan $E \subset \mathbb{R}^n$ (Perko, L., 2001).

Persamaan diferensial dikatakan nonlinear jika persamaan diferensial tersebut memenuhi paling sedikit satu dari tiga kriteria berikut (Intan J., 2015):

a) Memuat variabel tak bebas dari turunan-turunannya yang berpangkat selain satu.
b) Terdapat perkalian dari variabel tak bebas dan/atau turunan-turunannya.
c) Terdapat fungsi transendental dari variabel tak bebas dan turunan-turunannya.

Contoh 2.4.2

Diberikan persamaan diferensial nonlinear sebagai berikut:

a) $$\frac{d^2y}{dx^2} + 3\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2y = 0$$

Contoh (a) merupakan persamaan diferensial nonlinear, karena terdapat variabel tak bebas yang berpangkat dua $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$ dan turunannya yang berpangkat dua $\left(\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)$.

b) $$\frac{dy}{dx} + 2y = e^y$$

Contoh (b) merupakan persamaan diferensial nonlinear, karena terdapat fungsi transenden $\left(e^y\right)$.

c) $$2y\frac{dy}{dx} + 4xy = 0$$

Contoh (c) merupakan persamaan diferensial nonlinear, karena terdapat perkalian variabel tak bebas dan turunannya $\left(y\dfrac{dy}{dx} \right)$.

Sistem persamaan diferensial dikatakan nonlinear, jika persamaan diferensial yang membentuknya merupakan persamaan diferensial nonlinear.

Contoh 2.4.3

Diberikan sistem persamaan sebagai berikut:

$$\frac{d\vec{X}}{dt} = \begin{bmatrix} x_1 - x_2{}^2 \\ x_2 - x_1 x_2{}^2 \end{bmatrix} \tag{2.10}$$

Sistem persamaan (2.10) adalah sistem persamaan diferensial nonlinear.

2.5 Linearisasi

Linearisasi adalah proses mengubah sistem persamaan diferensial nonlinear menjadi sistem persamaan diferensial linear. Linearisasi suatu sistem persamaan diferensial nonlinear dilakukan untuk mengetahui perilaku sistem di sekitar titik kesetimbangan sistem tersebut. Adapun syarat linearisasi adalah bahwa bagian real dari akar karakteristiknya tidak nol. Linearisasi dapat dilakukan dengan menggunakan matriks Jacobian.

Definisi 2.5.1 (Olsder & Woude, 2004)

Vektor $\vec{X}^* \in \mathbb{R}^n$ disebut titik kesetimbangan (*equilibrium point*) dari $\dfrac{d\vec{X}}{dt} = \vec{f}\left(\vec{X}\right)$ jika memenuhi $\vec{f}\left(\vec{X}^*\right) = \vec{0}.$

Definisi 2.5.2 (Olsder & Woude, 2004)

(i) Titik kesetimbangan $\vec{X}^*$ dikatakan stabil jika untuk setiap $\varepsilon > 0,$ terdapat $\delta(\varepsilon) > 0,$ sedemikian sehingga jika $\left\| \vec{X}_0 - \vec{X}^* \right\| < \delta,$ maka $\left\| \vec{X}\left(t, \vec{X}_0\right) - \vec{X}^* \right\| < \varepsilon.$

(ii) Titik kesetimbangan $\vec{X}^*$ dikatakan stabil asimtotik jika titik kesetimbangan

$\vec{X}^*$ stabil dan terdapat $\delta_1 > 0$ sedemikian sehingga $\lim_{t\to\infty}\left\|\vec{X}\left(t,\vec{X}_0\right)-\vec{X}^*\right\|=0$ asalkan $\left\|\vec{X}_0-\vec{X}^*\right\|<\delta_1$.

(iii) Titik kesetimbangan dikatakan tidak stabil jika titik kesetimbangan tidak memenuhi poin (i).

Definisi 2.5.3 (Kocak, H., dan Hale, J.K., 1991)

Diberikan $\frac{d\vec{X}}{dt}=\vec{f}(\mathrm{X}),\mathrm{X}\in\mathbb{R}^n$ dengan $\vec{f}=(f_1,f_2,...,f_n)$ dengan $\vec{f}\in C(E)$, dan titik $\vec{X}^*\in\mathbb{R}^n$ merupakan titik ekuilibrium dari fungsi $\vec{f}=(f_1,f_2,...,f_n)$.

$$J\left(\vec{f}(\vec{X}^*)\right)=\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\vec{X}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\vec{X}^*)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1(\vec{X}^*)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(\vec{X}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\vec{X}^*)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2(\vec{X}^*)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(\vec{X}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(\vec{X}^*)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n(\vec{X}^*)}{\partial x_n} \end{pmatrix} \tag{2.11}$$

Matriks pada persamaan (2.10) adalah matriks Jacobian dari fungsi $\vec{f}=(f_1,f_2,...,f_n)$ di titik $\vec{X}^*$.

Definisi 2.5.4 (Perko, L., 2001)

Diberikan matriks Jacobian $J(\vec{f}\left(\vec{X}^*\right))$. Sistem linear

$$\vec{Y}=J\left(\vec{f}\left(\vec{X}^*\right)\right)\vec{Y}$$

disebut linearisasi sistem nonlinear $\frac{d\vec{X}}{dt}=\vec{f}\left(\vec{X}\right)$ di sekitar titik $\vec{X}^*$.

Adapun nilai eigen dari matriks Jacobian (2.10) adalah akar-akar yang diperoleh dari persamaan

$$\left|J\left(\vec{f}\left(\vec{X}^*\right)\right)-\lambda I\right|=0 \tag{2.12}$$

dengan I adalah matriks identitas, dan λ adalah akar persamaan (2.12) yang selanjutnya disebut sebagai nilai eigen.

Berikut teorema kriteria kestabilan titik kesetimbangan.

Teorema 2.5.1

Misalkan titik $\vec{X}^* \in \mathbb{R}^n$ adalah titik kesetimbangan $\frac{d\vec{X}}{dt} = \vec{f}\left(\vec{X}\right)$,

1. Jika bagian real semua nilai eigen $J(\vec{f}(\vec{X}^*))$ negatif, maka titik $\vec{X}^* \in \mathbb{R}^n$ stabil asimtotik.
2. Jika terdapat nilai eigen dari $J(\vec{f}(\vec{X}^*))$ dengan bagian real positif, maka $\vec{X}^*$ tidak stabil.

2.6 Kriteria Routh-Hurwitz

Kriteria kestabilan Routh-Hurwitz adalah suatu metode yang digunakan untuk menunjukkan kestabilan sistem dengan memperhatikan koefisien dari persamaan karakteristik tanpa menghitung akar-akar secara langsung. Jika persamaan polinomial adalah persamaan karakteristik, maka metode ini dapat digunakan untuk menentukan kestabilan dari suatu sistem. Prosedur dalam kriteria Routh-Hurwitz yaitu sebagai berikut:

a) Persamaan polinomial, orde ke-*n* ditulis dalam bentuk

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \ldots + a_{n-1}\lambda^n + a_n = 0 \qquad (2.13)$$

dengan koefisien-koefisien adalah besaran nyata $a_n \neq 0$.

b) Jika ada koefisien-koefisien bernilai nol atau negatif di mana paling tidak terdapat satu koefisien bernilai positif maka terdapat satu atau lebih akar kompleks yang mempunyai bagian real positif. Oleh karena itu, sistem tidak stabil. Agar diperoleh akar yang mempunyai bagian real yang negatif, maka semua koefisien bernilai positif belum cukup untuk menjamin kestabilan.

c) Jika semua koefisien positif, lalu buat tabel Routh-Hurwitz menentukan nilai eigen seperti Tabel 2.6 berikut.

Tabel 2.6 Routh-Hurwitz untuk polinomial (2.13)

Variabel	Koefisien					
λ^n	a_0	a_2	a_4	a_6	$\cdots$	a_{n-1}
λ^{n-1}	a_1	a_3	a_5	a_7	$\cdots$	a_n
λ^{n-2}	b_1	b_2	b_3	b_4	$\cdots$	b_n
λ^{n-3}	c_1	c_2	c_3	c_4	$\cdots$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$				
λ^1	e_1	e_2				
λ^2	f_1					
λ^0	g_1					

dengan koefisien-koefisien:

$$b_1 = \frac{a_1a_2 - a_0a_3}{a_1} \qquad c_1 = \frac{b_1a_3 - a_1b_2}{b_1}$$

$$b_2 = \frac{a_1a_4 - a_0a_5}{a_1} \qquad c_2 = \frac{b_1a_5 - a_1b_3}{b_1}$$

$$b_3 = \frac{a_1a_6 - a_0a_7}{a_1} \qquad c_3 = \frac{b_1a_7 - a_1b_4}{b_1}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$b_n = \frac{a_1a_{2n} - a_0a_{n+1}}{a_1} \qquad c_n = \frac{b_1a_{2n+1} - a_1b_{n+1}}{b_1}$$

d) Banyaknya akar tak stabil dapat dilihat dari banyaknya perubahan tanda pada kolom pertama tabel Routh-Hurwitz.

e) Syarat perlu untuk stabil adalah semua suku pada kolom pertama tabel Routh-Hurwitz bertanda sama.

2.7 Bilangan Reproduksi Dasar

Bilangan reproduksi dasar (*Basic Reproduction Number*) merupakan rata-rata banyaknya individu rentan hingga menjadi infeksius akibat satu individu infeksius selama masa infeksi dan dinotasikan dengan R_0. Bilangan reproduksi dasar dapat ditentukan dengan menggunakan persamaan yang hanya mengandung infeksi.

Metode *Next Generation Matrix* (NGM) merupakan metode yang digunakan untuk menentukan bilangan reproduksi dasar. Pada metode *Next Generation Matrix*, R_0 didefinisikan sebagai nilai eigen terbesar dari *next generation matriks.* Prosedur dalam menentukan R_0 adalah sebagai berikut:

a) Diberikan model epidemi yang terdiri dari n kompartemen yaitu

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(\vec{x};\mu) \tag{2.14}$$

dengan $i = 1, 2, .., n$

b) Kompartemen disusun sehingga $m \leq n$ kompartemen pertama adalah kompartemen penyakit (terinfeksi, terekspos, virus, parasit, bakteri).

c) Berdasarkan (a) dan (b), diperoleh $g(\vec{x};\mu) = \mathcal{F}_i(\vec{x};\mu) - \mathcal{V}_i(\vec{x};\mu)$ dengan $\mathcal{V}_i(\vec{x};\mu) = \mathcal{V}_i^-(\vec{x};\mu) - \mathcal{V}_i^+(\vec{x};\mu)$ untuk $i = 1, 2, .., m.$

$\mathcal{F}_i$ merepresentasikan bagian infeksi baru, $\mathcal{V}_i^+$ menyatakan bagian transisi individu ke kompartemen i, $\mathcal{V}_i^-$ merupakan bagian transisi individu keluar dari kompartemen $i.$

d) Misalkan $\vec{x}^*$ adalah titik kesetimbangan bebas penyakit sistem (2.14) maka

$$F = \left|\frac{\partial \mathcal{F}_i}{\partial x_j}(\vec{x}^*;\mu)\right| \text{ dan } V = \left|\frac{\partial \mathcal{V}_i}{\partial x_j}(\vec{x}^*;\mu)\right| \text{ dengan } 1 \leq i, j \leq m.$$

e) $R_0 = \rho(FV^{-1})$ dengan $\rho(FV^{-1})$ adalah spektral radius atau nilai eigen dominan matriks FV^{-1}. Matriks FV^{-1} merupakan matriks generasi selanjutnya (Nur W., 2023).

Teorema 2.7.1 (Van den Driesche, 2017)

Jika x_0 adalah DFE dari sistem $\frac{dx_i}{dt} = F_i(x) - V_i(x)$ maka x_0 stabil asimtotik lokal jika $R_0 < 1$ dan tidak stabil jika $R_0 > 1$.

2.8 Antraks

Zoonosis merupakan penyakit yang mempengaruhi populasi hewan maupun manusia (Blackburn dkk, 2015). *Zoonosis* tidak hanya memberikan dampak pada sistem kesehatan manusia dan hewan tetapi juga pada kondisi sosial, ekonomi, keamanan, dan kesejahteraan (Abawi dan Fibriana, 2019). Antraks merupakan salah satu penyakit *zoonosis*. Antraks disebabkan oleh *Bacillus anthracis* yang dapat membentuk spora (Salsabila dan Sunarno, 2019). Antraks secara umum dapat menginfeksi semua hewan *homoioterm* (berdarah panas) termasuk manusia (Yadeta dkk, 2020). Penyakit antraks pada ternak dapat menyebar melalui dua cara yaitu transmisi langsung dan transmisi tak langsung. Pada transmisi langsung, infeksi terjadi ketika hewan yang sehat bersentuhan dengan cairan tubuh, darah, atau jaringan hewan infeksius (Turnbull, 2008). Misalnya, hewan yang terluka atau memiliki kulit yang tergores bisa terpapar spora saat kontak langsung dengan hewan infeksius, atau melalui bulu atau kulit yang terkontaminasi. Sedangkan, transmisi tak langsung biasanya melibatkan paparan spora *Bacillus anthracis* yang ada di lingkungan, seperti tanah, air, dan bahan organik lainnya. Hewan dapat terinfeksi dengan cara menghirup, menelan, atau kontak langsung dengan spora tersebut. Spora *Bacillus anthracis* memiliki daya tahan yang sangat tinggi, mampu bertahan hidup di lingkungan ekstrem selama puluhan tahun, bahkan lebih dari 50 tahun. Spora ini bertahan dalam kondisi yang tidak mendukung pertumbuhan bakteri, seperti suhu tinggi, kekeringan, dan paparan bahan kimia, menjadikannya ancaman jangka panjang bagi hewan dan manusia (Turnbull, 2008).

Kejadian antraks dapat ditemukan hampir diseluruh dunia, umumnya kasus antraks terjadi di wilayah dengan geografis yang terbatas. Di beberapa wilayah, kondisi tanah yang berkapur dan bersifat alkalin, ditambah banjir musiman, meningkatkan risiko penyebaran spora ke permukaan tanah, yang memperbesar peluang paparan pada ternak (Xie, Auth dan Frucht, 2011). Indonesia merupakan salah satu wilayah yang memiliki angka kejadian antraks yang cukup tinggi. Terdapat 13 provinsi yang dinyatakan sebagai daerah endemis antraks yaitu Jawa Tengah, DKI Jakarta, Jawa Barat, NTB, NTT, Sumatera Barat, Jambi, Sulawesi Tenggara, Sulawesi Utara, Sulawesi Selatan, DI Yogyakarta, Papua dan Jawa Timur (Kemenkes RI., 2017). Di Indonesia, kejadian antraks pada hewan ternak ditandai dengan gejala yang bersifat akut, seperti munculnya demam tinggi, gemetar, kejang-kejang, konvulsi, kolaps, dan akhirnya terjadi mati (Kemenkes RI., 2013). Masa inkubasi antraks, yaitu waktu antara paparan spora hingga munculnya gejala, berkisar antara 1 hingga 7 hari, tetapi dapat berlangsung hingga 14 hari tergantung pada jumlah spora dan rute masuknya ke dalam tubuh (Xie, Auth dan Frucht, 2011). Kesembuhan alami dari antraks dapat terjadi dalam beberapa kasus, terutama pada infeksi ringan, namun kejadian ini sangat jarang terjadi karena antraks merupakan penyakit yang sangat mematikan, khususnya pada kasus yang akut. Meskipun ada kemungkinan sebagian hewan di daerah endemis memiliki kekebalan alami, hal ini tidak dapat diandalkan sebagai strategi pengendalian utama. Dalam beberapa situasi, hewan yang terinfeksi mungkin pulih tanpa pengobatan, tetapi kejadian ini sangat jarang terjadi dan tidak dapat menjadi pencegahan yang efektif (Salsabila dan Sunarno, 2019). Hewan yang telah sembuh dari penyakit antraks dapat kembali menjadi rentan karena kekebalan yang diperoleh setelah sembuh biasanya tidak bersifat permanen. Setelah infeksi, sistem kekebalan tubuh mungkin tidak memberikan perlindungan jangka panjang terhadap paparan antraks berikutnya, terutama jika paparan terjadi melalui spora di lingkungan, yang dapat bertahan lama. Hal serupa terjadi dengan vaksinasi, meskipun vaksin antraks dapat memberikan kekebalan, efek kekebalan vaksin bersifat sementara dan dapat berkurang seiring waktu.

Pemberantasan dan pengendalian penyakit antraks pada hewan ternak bersifat strategis dalam upaya mewujudkan kesehatan ternak, pengamanan ternak, serta melindungi kesehatan dan keselamatan manusia. Pencegahan penyakit antraks pada ternak perlu dilakukan secara rutin dan berkesinambungan. Usaha pencegahan terhadap penyakit antraks direkomendasikan dengan mempertimbangkan perbaikan manajemen ternak yang meliputi penyemprotan disinfektan, vaksinasi rutin, dan pengobatan terhadap hewan yang terinfeksi, pengendalian transmisi langsung, serta pengendalian transmisi tak langsung. Penyemprotan disinfektan, seperti larutan natrium hipoklorit aktif/pemutih aktif 1%, digunakan untuk membersihkan lingkungan dan peralatan yang terkontaminasi spora *Bacillus anthracis,* sehingga mengurangi risiko penyebaran. Vaksinasi rutin pada ternak di daerah endemis membantu meningkatkan kekebalan hewan, sehingga mengurangi risiko infeksi. Pengobatan antraks difokuskan pada individu ternak yang sudah terinfeksi atau menunjukkan gejala infeksius, di mana antibiotik diberikan untuk menurunkan angka kematian dan membatasi penyebaran infeksi di antara ternak lainnya. Namun, pengobatan ini tidak diberikan pada ternak yang sehat, karena tujuan utamanya adalah menangani infeksi yang sudah terjadi, bukan pencegahan pada ternak yang belum terpapar. Selain itu, pengobatan biasanya tidak efektif jika diberikan pada hewan yang sudah menunjukkan gejala parah atau mendekati kematian, karena antraks dapat berkembang sangat cepat. Pengendalian transmisi langsung memerlukan pengelolaan ternak yang ketat, dengan cara memastikan isolasi ternak infeksius, penanganan yang aman terhadap produk yang terkontaminasi, dan pengawasan kesehatan ternak secara berkala. Transmisi tak langsung, yang terjadi melalui kontaminasi lingkungan oleh spora dari hewan yang sakit dapat dicegah dengan menjaga kebersihan kandang, mengelola limbah ternak, serta meminimalkan kontak antara hewan sehat dan lingkungan yang terkontaminasi spora. Dengan penerapan langkah-langkah pencegahan dan pengobatan yang tepat, antraks dapat dikendalikan, sehingga melindungi kesehatan ternak.

BAB V
PENUTUP

Berdasarkan penelitian yang telah dilakukan maka diperoleh kesimpulan dan saran sebagai berikut.

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan yang telah dilakukan, dapat disimpulkan sebagai berikut:

1. Hasil model SEIRBV pada penyakit antraks sebagai berikut:

$$\frac{dS}{dt} = (1-b)\Lambda + \gamma V + \omega R - (\beta_1 SI + \beta_2 SB) - \mu S$$

$$\frac{dE}{dt} = \beta_1 SI + \beta_2 SB - (\varepsilon + \mu)E$$

$$\frac{dI}{dt} = \varepsilon E - (\eta + u + \mu)I$$

$$\frac{dR}{dt} = (\eta + u)I - (\omega + \mu)R$$

$$\frac{dB}{dt} = \delta I - (\beta_2 S + \mu_b + \mu_d)B$$

$$\frac{dV}{dt} = b\Lambda - (\gamma + \mu)V$$

2. Model epidemi SEIRBV pada penyakit antraks dengan mempertimbangkan perbaikan manajemen ternak menghasilkan dua titik kesetimbangan sebagai berikut:

   a. Titik kesetimbangan bebas penyakit

$$E_0 = \left(\frac{(1-b)\, w_6 \Lambda + b\gamma\Lambda}{w_{6\mu}}, 0, 0, 0, 0, \frac{b\Lambda}{w_6} \right)$$

b. Titik kesetimbangan endemik

$$E_1 = \left(\frac{s_1 + s_2\left(\frac{P_2}{P_1}\right)}{s_3}, \frac{w_2\left(\frac{P_2}{P_1}\right)}{\varepsilon}, \left(\frac{P_2}{P_1}\right), \frac{w_3\left(\frac{P_2}{P_1}\right)}{w_4}, \frac{\delta\left(\frac{P_2}{P_1}\right)}{w_5}, \frac{b\Lambda}{w_6} \right)$$

dengan

$$s_1 = (1-b)w_4 w_6 \varepsilon\Lambda + b w_4 \gamma\varepsilon\Lambda$$

$$s_2 = w_6\left(w_3\varepsilon\omega - w_1 w_2 w_4\right)$$

$$s_3 = w_4 w_6 \varepsilon\mu$$

$$P_1 = s_2 w_5 \beta_1 \varepsilon + s_2 \beta_2 \delta\varepsilon < 0$$

$$P_2 = -s_1 w_5 \beta_1 \varepsilon - s_1 \beta_2 \delta\varepsilon + s_3 w_1 w_2 w_5$$

Berdasarkan analisis kestabilan titik kesetimbangan yang dilakukan, diperoleh bahwa titik kesetimbangan bebas penyakit $\left(E_0\right)$ stabil jika $\frac{PQ-R}{P} > 0$ dan $R_0 = \frac{\left(\beta_1 w_5 + \beta_2\delta\right)\left(\left(1-b\right)w_6\varepsilon\Lambda + b\gamma\varepsilon\Lambda\right)}{\mu w_1 w_2 w_5 w_6} < 1$ dan titik kesetimbangan endemik $\left(E_1\right)$ stabil jika $K > 0,$ $\frac{KL-M}{K} > 0,$ $\frac{hM-iK}{h} > 0,$ $\frac{ji-hP}{j} > 0,$ $P > 0.$

3. Berdasarkan hasil simulasi numerik terlihat bahwa penyakit antraks akan berkurang seiring berjalannya waktu jika $R_0 < 1.$ Semakin besar nilai laju kematian bakteri akibat disinfektan, proporsi vaksinasi, dan laju kesembuhan karena pengobatan, maka semakin kecil tingkat penyebaran penyakit antraks. Dengan mengombinasikan ketiga intervensi ini terbukti lebih efektif dalam menekan nilai R_0 dibandingkan dengan menerapkan salah satu intervensi tersebut secara terpisah. Apabila kombinasi ketiga intervensi tersebut diterapkan secara optimal, maka bilangan reproduksi dasar R_0 dapat ditekan

hingga kurang dari 1. Hal ini berarti setiap individu infeksius akan menularkan penyakit ke kurang dari satu individu lain. Akibatnya penyebaran penyakit antraks dapat dihentikan.

5.2 Saran

Pada tugas akhir ini, penulis membahas tentang analisis dinamik model epidemi penyakit antraks dengan perbaikan manajemen ternak. Untuk penelitian selanjutnya, disarankan untuk memperluas model epidemi penyakit antraks dengan mempertimbangkan variabel lain yang berpotensi mempengaruhi dinamika penyebarannya, seperti melakukan karantina pada individu infeksius untuk mengendalikan penyebaran penyakit. Selain itu, perlu diperhitungkan variabel manusia, mengingat antraks adalah penyakit *zoonosis,* serta faktor keparahan penyakit pada manusia untuk memberikan gambaran epidemi yang lebih akurat. Dari sudut pandang peternak, biaya intervensi seperti penyemprotan disinfektan, vaksinasi, dan pengobatan juga perlu dipertimbangkan untuk manajemen yang lebih efektif.

DAFTAR PUSTAKA

Abawi, I., & Fibriana, A. I., 2019. Analisis spasial faktor lingkungan fisik daerah endemik antraks. *HIGEIA (Journal of Public Health Research and Development)*, *3*(2), 190-201.

Adji, R. S., & Natalia, L. I. L. Y., 2006. Pengendalian penyakit antraks: Diagnosis, vaksinasi dan investigasi. *Wartazoa*, *16*, 198-205.

Anton, H. (2010). *Elementary Linear Algebra* (10th ed.). Wiley.

Astiti, L. G. S., 2010. Manajemen Pencegahan dan Pengendalian Penyakit Pada Ternak Sapi. *Balai Pengkajian Teknologi Pertanian NTB*.

Baloba, E. B., & Seidu, B., 2022. A mathematical model of anthrax epidemic with behavioural change. *Mathematical Modelling and Control*, *2*(4), 243-56.

Bhat, P., Mohan, D. N., & Lalitha, M. K., 1989. Current incidence of anthrax in animals and man in India. In *Proceedings of the International Workshop on Anthrax at Winchester, UK. Salisbury Med Bull* (Vol. 68). Special (Suppl.): 8.

Blackburn, J. K., Odugbo, M. O., Van Ert, M., O'Shea, B., Mullins, J., Perrenten, V., ... & Hadfield, T., 2015. Bacillus anthracis diversity and geographic potential across Nigeria, Cameroon and Chad: further support of a novel West African lineage. *PLoS neglected tropical diseases*, *9*(8), e0003931.

Candra M., 2010, Analisis Kestabilan Titik Kesetimbangan Model Matematika Proses Transmisi Virus Dengue di dalam Tubuh Manusia dengan Terapi Obat Herbal, Vol.2.No.2,110-119.

Evans, L. C., 2022. *Partial differential equations* (Vol. 19). American Mathematical Society.

Friedman, A., & Yakubu, A. A., 2013. Anthrax epizootic and migration: Persistence or extinction. *Mathematical Biosciences*, *241*(1), 137-144.

Githire, G. T. O., Kimathi, G., & Wainaina, M., 2019. Analysis of transmission dynamics of anthrax in animals: a modeling approach. *Journal of Scientific Research and Reports*, *23*(1), 1-9.

Intan, J., 2015. *Analisis Kestabilan Titik Kesetimbangan Model Matematika Proses Transmisi Virus Dengue Di Dalam Tubuh Manusia Dengan Terapi Obat Herbal*, Doctoral dissertation, Universitas Negeri Semarang.

Jusrawati. 2018. Pemodelan Matematika Terhadap Kelangsungan Hidup Penderita Diabetes Melitus, Makassar: Universitas Islam Negeri (UIN) Alauddin.

Kementerian Kesehatan. 2013. Pedoman Tata Laksana Kasus dan Pemeriksaan Laboratorium Penyakit Anthraks di Rumah Sakit. Dirjen Pemberantasan Penyakit Menular dan Penyehatan Lingkungan, Kementerian Kesehatan Republik Indonesia, Jakarta.

Kementrian kesehatan Republik Indonesia. 2017. Pencegahan dan Pengendalian Penyakit Antraks di Indonesia. Subdit Zoonosi.

Kocak, H., & Hale, J.K. 1991. *Dynamical and Bifurcation.* New York: Springer-Verlag.

Mackey, C., & Kribs, C., 2021. Can scavengers save zebras from anthrax? A modeling study. *Infectious Disease Modelling*, *6*, 56-74.

Mushayabasa, S., Marijani, T., dan Masocha, M., 2015, Dynamical Analysis and Control Strategies in Modeling Anthrax, *Compu. and Appl. Mathematics*, 36:1333-1348.

Nur, W. 2023. Kajian Penyebaran dan Pengendalian Penyakit *Schistosomiasis* dengan Model Matematika, *Disertasi*, Program Studi Doktor Matematika, Universitas Brawijaya, Malang.

Olsder, G.J. & Woude, J.W, van der, 2004, Mathematical System Theory, Netherland: VVSD.

Pagalay, U., 2009. Mathematical modelling: Aplikasi pada kedokteran, imunologi, biologi, ekonomi, dan perikanan.

Perko, L., 2001. Nonlinear systems: Global theory. *Differential Equations and Dynamical Systems*, 181-314.

Prawandani, N., Toaha, S., & Kasbawati, K., 2020. Model Matematika VSEIR Penyebaran Penyakit Antraks pada Populasi Hewan dengan Efek Vaksinasi dan Pengobatan. *Jurnal Matematika, Statistika, dan Komputasi*.

Ratianingsih, R., 2019. Analisis Kestabilan Penyebaran Penyakit Antraks Pada Populasi Hewan Dengan Pemberian Vaksinasi: Studi Kasus Untuk Infeksi Pada Populasi Manusia. *Jurnal Ilmiah Matematika dan Terapan*, *16*(2), 172-184.

Saad-Roy, C. M., Van den Driessche, P., & Yakubu, A. A., 2017. A mathematical model of anthrax transmission in animal populations. *Bulletin of mathematical biology*, *79*(2), 303-324.

Salsabila, D. A., & Sunarno., 2019. *Identifikasi agen penyakit anthrax pada sediaan apus darah sapi potong di Surakarta. E-journal Binawakya*, *14*(3), 2291-8.

Saputri, R., 2017. Solusi numerik model matematika glukosa, insulin, dan sel beta pada penyakit diabetes mellitus menggunakan metode newton, *Doctoral dissertation,* Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.

Sinkie, Z. M., & Narasimha Murthy, S., 2016. Modeling and simulation study of anthrax attack on environment. *differential equations*, *1*, 2.

Sugiarto, S., & Alam, A., 2023. Analisis Kestabilan Model Penyebaran Penyakit Antraks Tipe SVEIQR pada Ternak. *Jurnal Sains Matematika dan Statistika*, *9*(2), 41-52.

Toaha, S., 2013. Analisis Kestabilan dan Keuntungan Maksimal Pada Model Pertumbugan Populasi Mangsa-Pemangsa dengan Tahapan Struktur. In *Prosiding Seminar Nasional Matematika, Sains, dan Teknologi*.

Turnbull, P. C. B., 2008. Anthrax in humans and animals. 4th ed. Geneva: Word Health Organization.

Van den Driessche, P., 2017. Reproduction numbers of infectious disease models. *Infectious disease modelling*, *2*(3), 288-303.Abawi, I., Arulita., I.F. 2019. Analisis Spasial Faktor Lingkungan Fisik Daerah Endemik Antraks. Jurnal Higeia. 3 (2).

Xie, Y., Auth, M., & Frucht, D., 2011. "Anthrax". Infectious Disease Clinics of North America.

Yadeta, W., Giro, A., Amajo, M., & Jilo, K., 2020. Recent understanding of the epidemiology of animal and human anthrax in Ethiopia with emphasis on diagnosis, control and prevention interventions-review. *World J Med Sci*, *17*(1), 1-9.

Yakin, E.A., 2010. Vaksinasi Anthrax di Indonesia, Widyatama, Bandung, 2-3, 19(1).

Yuliani, S., Retno, S. R., & Binatari, N., 2016. Analisis penyebaran penyakit diare sebagai salah satu penyebab kematian pada balita menggunakan model matematika SIS (Susceptible-Infected-Susceptible. *S1 thesis*, Universitas Negeri Yogyakarta (UNY).

Yuwono, M., 2020, 8 Bulan Antraks Menyebar di Gunungkidul dengan 27 Warga Positif dna Hindari Makan Daging Sapi Sakit, https://regional .kompas.com,3 Maret 2020.