

SKRIPSI
PENYELESAIAN KASUS INTEGRAL TAK WAJAR DENGAN
INTEGRAN MEMUAT FUNGSI EKSPONENSIAL,
LOGARITMA DAN TRIGONOMETRI



SALIM
E0120506

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS SULAWESI BARAT
2026

SKRIPSI
PENYELESAIAN KASUS INTEGRAL TAK WAJAR DENGAN
INTEGRAN MEMUAT FUNGSI EKSPONENSIAL,
LOGARITMA DAN TRIGONOMETRI



SALIM
E0120506

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS SULAWESI BARAT
2026

SKRIPSI
PENYELESAIAN KASUS INTEGRAL TAK WAJAR DENGAN
INTEGRAN MEMUAT FUNGSI EKSPONENSIAL,
LOGARITMA DAN TRIGONOMETRI



Diajukan sebagai salah satu syarat memperoleh gelar Sarjana pada Program
Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Sulawesi Barat

SALIM
E0120506

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS SULAWESI BARAT
2026

SURAT PERNYATAAN

Yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama : Salim

NIM : E0120506

Program Studi : Matematika

Menyatakan bahwa tugas akhir dengan judul ***“Penyelesaian Kasus Integral Tak Wajar Dengan Integran Memuat Fungsi Eksponensial Logaritma Dan Trigonometri”*** disusun berdasarkan prosedur ilmiah yang telah melalui pembimbingan dan bukan merupakan plagiat dari karya ilmiah/naskah yang lain. Apabila dikemudian hari terbukti bahwa pernyataan ini benar, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai peraturan yang berlaku.

Majene,.....2026



alim

HALAMAN PENGESAHAN

Skripsi ini diajukan oleh:

Nama : Salim

NIM : E0120506

Judul : Penyelesaian Kasus Integral Tak Wajar Dengan Integral
Memuat Fungsi Eksponensial, Logaritma Dan Trigonometri

Telah berhasil di pertanggung jawabkan di hadapan Tim Penguji (SK Nomor 155/UN55.7/HK./04/2025) dan diterima sebagai bagian persyaratan memperoleh gelar Sarjana S1 Matematika pada Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Sulawesi Barat.

Disahkan oleh:

Dekan FMIPA
Universitas Sulawesi Barat

MUSAFIRA, S.Si., M.Sc.
NIP. 197709112006042002

Tim Penguji:

Ketua Penguji : Musafira, S.Si., M.Sc.

Sekretaris : Fardinah, S.Si., M.Sc.

Pembimbing 1 : Muh. Rifandi, S.Si., M.Si.

Pembimbing 2 : Hirman Racman, S.Si., M.Si.

Penguji 1 : Fardinah, S.Si., M.Sc.

Penguji 2 : Andi Seppewali, S.Kom, M.Kom.

(.....)

(.....)

(.....)

(.....)

(.....)

(.....)

ABSTRAK

Penelitian ini membahas penyelesaian berbagai bentuk integral tak wajar yang integrannya memuat fungsi eksponensial, logaritma, dan trigonometri. Integral tak wajar merupakan integral yang batasnya tak hingga atau memiliki titik singular sehingga memerlukan pendekatan limit untuk menentukan nilai konvergensinya. Penelitian ini dilakukan melalui studi literatur dengan mengkaji teori dasar integral tak wajar, sifat-sifat fungsi eksponensial, logaritma, trigonometri, serta fungsi Gamma dan Beta sebagai alat bantu dalam penyelesaian beberapa integral khusus.

Hasil penelitian menunjukkan bahwa integral tak wajar dengan fungsi eksponensial umumnya bersifat konvergen karena sifat peluruhan eksponensial yang menurun sangat cepat menuju nol. Pada fungsi logaritma, integral dapat bersifat konvergen atau divergen bergantung pada perilaku fungsi di sekitar titik singular, khususnya di $x = 0$. Fungsi trigonometri murni seperti $\sin(x)$ dan $\cos(x)$ menghasilkan integral yang divergen karena osilasi yang tidak mereda, namun integral dapat menjadi konvergen apabila terdapat faktor peredam seperti eksponensial atau fungsi rasional. Selain itu, fungsi Gamma dan Beta terbukti efektif dalam menyelesaikan integral tak wajar tertentu yang tidak dapat diintegralkan secara langsung dengan metode elementer.

Secara keseluruhan, penelitian ini memberikan pemahaman mengenai karakteristik konvergensi integral tak wajar berdasarkan sifat fungsi integrannya serta menunjukkan peranan fungsi khusus dalam membantu penyelesaian integral yang kompleks.

Kata kunci: integral tak wajar, fungsi eksponensial, fungsi logaritma, fungsi trigonometri, fungsi Gamma, fungsi Beta.

ABSTRAC

This research discusses the solution of various forms of improper integrals whose integrands contain exponential, logarithmic, and trigonometric functions. Improper integrals are integrals whose limits are infinite or have singular points so that they require a limit approach to determine their convergence value. This research was conducted through a literature study by examining the basic theory of improper integrals, the properties of exponential, logarithmic, and trigonometric functions, as well as the Gamma and Beta functions as aids in solving several special integrals.

The results of the study show that improper integrals with exponential functions are generally convergent due to the exponential decay property which decreases very rapidly towards zero. In logarithmic functions, the integral can be convergent or divergent depending on the function's behavior around the singular point, especially at $x = 0$. Pure trigonometric functions such as $\sin(x)$ and $\cos(x)$ produce divergent integrals due to undamped oscillations, but the integral can become convergent if there is a damping factor such as an exponential or a rational function. In addition, the Gamma and Beta functions are proven to be effective in solving certain improper integrals that cannot be integrated directly by elementary methods

Overall, this study provides an understanding of the convergence characteristics of improper integrals based on the properties of their integrand functions and demonstrates the role of special functions in helping solve complex integrals.

Keywords: *improper integrals, exponential functions, logarithmic functions, trigonometric functions, Gamma functions, Beta functions.*

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Matematika adalah ilmu deduktif yang menerima induktif, juga merupakan bahasa simbolis, ilmu matematika merupakan ilmu tentang bagaimana menyusun pola-pola yang teratur dan struktur terorganisir, mulai dari unsur-unsur yang tidak terdefinisikan sampai unsur-unsur yang pasti, ke aksioma atau hipotesis dan akhirnya ke proposisi. Oleh karena itu untuk memberikan materi matematika ini seharusnya menggunakan tahapan-tahapan konkrit, semi konkrit, sesuatu yang samar semi abstrak dimana tahapan tersebut perkembangan harus sesuai dengan tahapan perkembangan dan kemampuan siswa tersebut, sesuai jenjang pendidikan yang ditempuh (Sireger et al., 2014).

Kalkulus merupakan cabang ilmu matematika yang mempelajari limit, turunan, integral, dan deret tak hingga. Berdasarkan definisi hasil belajar dan kalkulus tersebut dapat disimpulkan bahwa hasil belajar kalkulus yaitu tingkat perkembangan mental atau kemampuan dengan proses dan langkah pembelajaran tertentu pada cabang ilmu matematika yang mempelajari limit, turunan, integral, dan deret tak tentu. Konsep hasil belajar kalkulus dalam pendidikan pada umumnya mengacu pada tujuan belajar yang diharapkan dapat dicapai oleh mahasiswa setelah mengikuti mata kuliah tertentu dalam wujudnya berupa kemampuan. (Maya Nurfitriani 2014)

Integral merupakan konsep yang penting dalam kalkulus selain turunan. Integral merupakan operasi utama didalam kalkulus integral. Prinsip-prinsip integral diformulasikan oleh Isaac Newton dan Gottfried Leibniz pada abad 17 dengan memanfaatkan hubungan erat antara anti turunan dan integral tentu yaitu suatu hubungan yang memungkinkan untuk menghitung nilai yang sebenarnya dari banyak integral tentu dengan menggunakan teorema dasar kalkulus. Melalui teorema ini mereka

mengembangkan konsep integral yang dikaitkan dengan turunan, sehingga integral didefinisikan sebagai anti turunan karena keduanya memiliki hubungan yang saling berkebalikan (Monariska 2019).

Fungsi Eksponensial merupakan salah satu pembahasan yang terdapat dalam ilmu matematika. Fungsi eksponensial merupakan suatu fungsi yang memuat bentuk eksponen dengan pangkat berupa variabel ditulis dengan notasi ex (Thomas dkk., 2014). Salah satu konstantanya adalah konstanta e yang merupakan basis dari logaritma natural. Nilai dari e merupakan bilangan irasional yang nilainya tidak dapat dipastikan, yaitu $e = 2,71828$.

Dalam kehidupan sehari-hari, fungsi eksponensial dapat diterapkan salah satunya dalam bidang biologi dan ekonomi (Saputro, 2019). Sebagai contoh, dalam bidang biologi fungsi eksponensial dapat digunakan untuk menghitung jumlah perkembangan bakteri dalam waktu tertentu. Sedangkan fungsi eksponensial pada bidang ekonomi biasanya digunakan dalam menghitung bunga majemuk di perbankan. Secara umum nilai fungsi eksponensial dapat diekspansikan menggunakan deret Maclaurin dari e , x dan menghasilkan deret pangkat $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ (Varberg dkk., 2007).

Logaritma adalah materi matematika yang dianggap sulit bagi siswa, sehingga untuk memudahkan siswa memahami materi logaritma dibutuhkan kegiatan belajar-mengajar yang bermakna dan pemahaman yang baik pada materi persyarat (Widowati 2003 : 266). Fungsi logaritma merupakan salah satu bentuk fungsi yang tidak asing lagi dan sering dijumpai dalam bahasan di kalkulus. Salah satu fungsi logaritma yang akan dibahas dalam artikel ini adalah logaritma yang berbasis bilangan e yang disebut logaritma asli, dan mempunyai lambang $\ln x$. penulisan $\ln x$ dibaca logaritma asli dari x . konsep logaritma asli ini diperlukan dalam pendefinisian fungsi lainnya dalam kalkulus yaitu fungsi Eksponensial. Diketahui bahwa fungsi logaritma asli merupakan invers atau balikan dari fungsi eksponensial. Selama ini fungsi logaritma, fungsi

logaritma asli dan fungsi eksponensial yang dipelajari di kuliah adalah fungsi yang hanya mempunyai daerah asal atau domain bilangan real (Kartika, 2018).

Fungsi trigonometri adalah mengingatkan kembali pengetahuan lama yang dimiliki peserta didik mengenai definisi, notasi fungsi dan rumus fungsi yang dihubungkan dengan perbandingan trigonometri yang juga merupakan fungsi. Visualisasi grafik fungsi merupakan kekuatan dalam konstruksi fungsi trigonometri. Oleh karena itu peserta didik diarahkan untuk memahami fungsi trigonometri dengan melakukan visualisasi berbagai jenis fungsi trigonometri dalam satuan sudut derajat dengan bantuan geogebra. (Fatimah, 2007).

1.2 Rumusan masalah

1. Bagaimana penyelesaian integral tak wajar dengan integral memuat fungsi eksponensial?
2. Bagaimana penyelesaian integral tak wajar dengan integral fungsi logaritma?
3. Bagaimana penyelesaian integral tak wajar dengan integral memuat fungsi trigonometri?

1.3 Tujuan Penelitian

1. Bagaimana untuk mengetahui integral tak wajar dengan integral fungsi eksponensial.
2. Bagaimana untuk mengetahui integral tak wajar dengan integral fungsi logaritma.
3. Bagaimana untuk mengetahui integral tak wajar dengan fungsi trigonometri.

1.4 Manfaat penelitian

1. Penelitian ini dapat bermanfaat untuk semua orang yang sedang mencari informasi tentang materi integral tak wajar.
2. Penelitian ini untuk benih informasi berharga di fakultas matematika dan ilmu pengetahuan alam, universitas sulawesi barat.

3. Tentunya Manfaat untuk penulis itu sendiri, sebagai bekal informasi kedepannya jika ingin melanjutkan pendidikan.

BAB V

PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Simpulan yang dapat diambil dari hasil dan pembahasan pada Bab 4 adalah sebagai berikut.

1. Integral tak wajar dengan fungsi eksponensial menunjukkan sifat konvergen absolut. Hal ini disebabkan oleh perilaku fungsi eksponensial yang menurun sangat cepat menuju nol ketika $x \rightarrow \infty$. Bahkan ketika dikombinasikan dengan fungsi lain seperti polinomial atau trigonometri, redaman eksponensial tetap mendominasi sehingga luas total di bawah kurva berhingga. Dengan demikian, fungsi eksponensial berperan sebagai peredam alami dalam integral tak wajar.
2. Integral tak wajar dengan fungsi logaritma pada umumnya konvergen bersyarat, bergantung pada batas integrasi dan bentuk fungsi pengali yang menyertainya. Meskipun fungsi $\ln(x)$ tidak terdefinisi pada $x = 0$ dan tumbuh tanpa batas pada $x \rightarrow \infty$, pertumbuhannya yang sangat lambat menyebabkan luas total di bawah kurva masih berhingga untuk beberapa bentuk integral. Artinya, konvergensi fungsi logaritmik lebih ditentukan oleh laju pertumbuhan dibandingkan nilai ekstremnya.
3. Integral tak wajar dengan fungsi trigonometri secara umum tidak konvergen jika berdiri sendiri karena sifatnya yang berosilasi tanpa batas. Namun, integral ini dapat menjadi konvergen kondisional atau konvergen absolut apabila terdapat faktor peredam yang menyebabkan amplitudo osilasi berkurang. Dengan demikian, fungsi trigonometri memerlukan peredam eksternal untuk mencapai kestabilan nilai integralnya.

5.2 saran

saran yang dapat penulis berikan dari hasil dan pembahasan yang telah diberikan adalah:

1. Penelitian ini menunjukkan bahwa pemahaman terhadap sifat konvergensi integral tak wajar tidak hanya penting secara analitis, tetapi juga konseptual. Oleh karena itu, penulis menyarankan agar topik integral tak wajar diperluas dalam perkuliahan Analisis Matematika dengan pendekatan visualisasi grafis atau simulasi numerik, agar mahasiswa dapat memahami hubungan antara bentuk fungsi dan sifat konvergensinya secara lebih intuitif.
2. Hasil penelitian ini dapat dijadikan dasar untuk mengkaji penerapan integral tak wajar pada bidang lain seperti fisika (peluruhan eksponensial, gelombang teredam), statistika (fungsi kepadatan peluang), serta teknik (analisis sinyal dan getaran). Disarankan agar penelitian lanjutan mengaitkan sifat konvergensi integral dengan konteks aplikatif tersebut.
3. Untuk penelitian berikutnya, disarankan mengkaji integral tak wajar yang melibatkan fungsi campuran lebih kompleks, seperti fungsi eksponensial-logaritmik atau fungsi trigonometri dengan redaman polinomial, serta mengkaji perilaku konvergensinya menggunakan pendekatan analisis numerik atau kompleks.
4. Peneliti juga menyarankan agar perangkat lunak matematika seperti Python, MATLAB, atau GeoGebra digunakan secara lebih intensif dalam pembelajaran dan penelitian integral tak wajar, sehingga visualisasi perilaku fungsi terhadap batas ekstrem dapat diamati secara langsung dan memperkuat pemahaman konseptual mahasiswa.

DAFTAR PUSTAKA

- Ruseffendi, E. T. dkk. (1991). Pendidikan Matematika 3. Jakarta: Depdikbud
- Siregar, S. N., Solfitri, T., & Roza, Y. (2014). Pengenalan Konsep Operasi Hitung Bilangan Melalui Permainan Congklak Dalam Pembelajaran Matematika. *AlKhwarizmi: Jurnal Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam*, 2, 119–128.
- Monariska, E. (2019). Analisis kesulitan belajar mahasiswa pada materi integral. *Jurnal Analisa*, 5(1), 9-19.
- Nurfitriani, Maya. Pengaruh kreativitas dan kedisiplinan mahasiswa terhadap hasil belajar kalkulus. *Formatif: Jurnal Ilmiah Pendidikan MIPA*, 2015, 4.3.
- Thomas, dkk., 2014, *SIFAT-SIFAT EKSPONENSIAL*, Journal Dearmauli saragih,fransiskus fran, nilamsari kusumastuti.
- Varberg, D., Purcell, E. J., & Rigdon, S. E. (2007). Kalkulus Edisi Kesembilan. Jakarta: Erlangga.
- Saputro, A. P. (2019). Matematika Untuk Kehidupan: Fungsi Eksponensial. Yogyakarta: Deepublish
- Widowati, S. 2013. Pengembangan Buku Kerja Materi Eksponen Bercirikan RME untuk Siswa SMK Teknik. *Jurnal Pendidikan Sains*, 1(3), h. 266.
- Kartika, E. D. (2018). Karakteristik Matriks sebagai Daerah Asal Suatu Logaritma. *Matematika dan Pembelajaran*, 6(1), 60-64.,