

SKRIPSI
KONSTRUKSI $(\alpha, 1)$ -DERIVASI PADA SEMIRING



ASMAN
E0121003

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS SULAWESI BARAT
TAHUN 2025

SKRIPSI
KONSTRUKSI $(\alpha, 1)$ -DERIVASI PADA SEMIRING



Diajukan sebagai salah satu syarat memperoleh gelar sarjana pada
Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu
Pengetahuan Alam Universitas Sulawesi Barat

ASMAN

E0121003

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS SULAWESI BARAT
TAHUN 2025

SURAT PERNYATAAN

Yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Asman

Tempat/Tgl Lahir : Palla-pallang, 1 April 2003

Nim : E0121003

Program Studi : Matematika

Menyatakan bahwa tugas akhir dengan judul “Konstruksi $(\alpha, 1)$ -derivasi pada Semiring” disusun berdasarkan prosedur ilmiah yang telah melalui pembimbingan dan bukan merupakan plagiat dari karya ilmiah/naskah yang lain. Apabila kemudian hari terbukti bahwa pernyataan ini benar, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai peraturan yang berlaku.

Majene, 1 April 2025



Asman

HALAMAN PENGESAHAN

Skripsi ini diajukan oleh:

Nama : Asman

NIM : E0121003

Judul Penelitian : Konstruksi $(\alpha, 1)$ - derivasi pada Semiring

Telah berhasil dipertanggungjawabkan dihadapan Tim Penguji (SK Nomor 33/UN55.7/HK.04/2025, tanggal 22 April 2025) dan diterima sebagai bagian persyaratan memperoleh gelar sarjana S1 pada Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Sulawesi Barat.

Disahkan Oleh.

Dekan FMIPA

Universitas Sulawesi Barat

Musafira, S.Si., M.Sc.
NIP. 197709112006042002

Tim Penguji:

Ketua Penguji : Musafira, S.Si., M.Sc.

Sekretaris : Fardinah, S.Si., M.Sc.

Pembimbing 1 : Meryta Febrilian Fatimah, S.Si., M.Sc.

Pembimbing 2 : Andi Seppewali, S.Kom., M.Kom.

Penguji 1 : Fardinah, S.Si., M.Sc.

Penguji 2 : Darma Ekawati, S.Pd., M.Sc.

Penguji 3 : Rahmawati, S.Si., M.Si.

(.....)

(.....)

(.....)

(.....)

(.....)

(.....)

(.....)

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Dengan mengucapkan puji syukur, penulis panjatkan ke hadirat Allah SWT, Tuhan Yang Maha Esa, atas segala limpahan rahmat, hidayah, dan kasih sayang-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi dengan judul **“Konstruksi $(\alpha, 1)$ -derivasi pada Semiring”** sebagai salah satu syarat dalam menyelesaikan studi di jenjang sarjana. Tanpa pertolongan dan ridha-Nya, penulisan skripsi ini tidak akan terselesaikan dengan baik. Salawat serta salam penulis haturkan kepada junjungan kita, Nabi Muhammad SAW, yang telah membawa umat manusia dari zaman kegelapan menuju cahaya ilmu pengetahuan yang penuh berkah. Semoga syafaatnya senantiasa menyertai kita semua di dunia dan akhirat.

Penulisan skripsi ini merupakan salah satu langkah penting dalam perjalanan penulis di dunia akademik, yang tidak terlepas dari dukungan berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis ingin menyampaikan rasa terima kasih yang sebesar-besarnya kepada semua pihak yang telah memberikan bantuan, dukungan, dan doa. Terutama kepada kedua orang tua tercinta, bapak Alm. Hasanuddin dan ibu Nurliah yang menjadi sumber kekuatan dan inspirasi terbesar dalam setiap langkah kehidupan. Dengan kasih sayang yang tulus, doa yang tiada henti, dan dukungan yang tak terhingga, penulis mampu menjalani seluruh proses ini hingga mencapai tahap akhir. Ungkapan terima kasih yang mendalam juga penulis sampaikan kepada saudara-saudara terkasih Nur Anisa dan Ansyar yang selalu memberikan semangat, motivasi, serta menjadi tempat berbagi dalam suka dan duka selama proses penyusunan skripsi ini. Serta banyak pihak yang telah membantu dalam penyelesaian Skripsi ini. Dalam kesempatan ini, penulis juga ingin menyampaikan terima kasih kepada:

1. Bapak Prof. Dr. Muhammad Abdy, M.Si., Ph.D., selaku Rektor Universitas Sulawesi Barat.
2. Ibu Musafira, S.Si., M.Sc., selaku Plt. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Sulawesi Barat.

3. Bapak Hirman Rachman, S.Si., M.Si., selaku Wakil Dekan I Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Sulawesi Barat.
4. Ibu Fardinah, S.Si., M.Sc., selaku Koordinator Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Sulawesi Barat sekaligus Dosen Penguji I yang telah memberikan saran dan masukan kepada penulis dalam penyusunan skripsi ini.
5. Bapak Andi Seppewali, S.Kom., M.Kom., selaku Dosen Penasehat Akademik sekaligus Dosen Pembimbing II yang telah membimbing penulis dalam penyusunan skripsi ini.
6. Ibu Meryta Febrilian Fatimah, S.Si., M.Sc., selaku Dosen pembimbing I yang telah membimbing penulis dalam penyusunan skripsi ini.
7. Ibu Darma Ekawati, S.Pd., M.Sc., selaku Dosen Penguji II dan Ibu Rahmawati, S.Si., M.Si., selaku Dosen Penguji III yang telah memberikan saran dan masukan kepada penulis dalam penyusunan skripsi ini.
8. Segenap civitas akademika Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Sulawesi Barat.
9. Untuk teman-teman seperjuangan Matematika 2021, terimakasih atas dukungan dan bantuannya selama proses penulisan skripsi ini.

Dengan segala kerendahan hati, penulis menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari sempurna. Oleh karena itu, saran dan kritik yang membangun sangat diharapkan sebagai upaya perbaikan di masa mendatang. Semoga karya sederhana ini dapat memberikan manfaat bagi pembaca serta menjadi kontribusi kecil dalam pengembangan ilmu pengetahuan di masa depan.

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh.

Majene, 1 April 2025



Asman

ABSTRAK

Diberikan semiring S dan didefinisikan suatu pemetaan d dari S ke S disebut derivasi. Selanjutnya didefinisikan pemetaan aditif d dari S ke X yang merupakan generalisasi dari derivasi pada semiring dengan melibatkan suatu endomorfisma α, β pada S yang selanjutnya disebut dengan (α, β) -derivasi. Lebih lanjut, dengan mengambil β sebagai pemetaan identitas maka diperoleh bentuk derivasi yang lebih khusus yaitu $(\alpha, 1)$ -derivasi. Pada tugas akhir ini, dibahas hubungan antara S semiring prima dan S semiring dengan hukum kanselasi terhadap $(\alpha, 1)$ -derivasi pada S .

Kata Kunci: Semiring, semiring prima, kanselasi, derivasi, $(\alpha, 1)$ -derivasi.

ABSTRACT

Let S be a semiring, a mapping d from S to S is called a derivation. Furthermore, an additive mapping d from S to X , which generalizes the notion of derivation on a semiring by involving endomorphisms α and β on S , is defined and referred to as an (α, β) -derivation. Moreover, by taking β as the identity mapping, a more specific form of derivation, namely the $(\alpha, 1)$ -derivation, is obtained. This thesis discusses the relationship between a prime semiring S and a semiring S with the cancellative law in relation to the $(\alpha, 1)$ -derivation on S .

Keywords: *Semiring, prime semiring, cancellative, derivation, $(\alpha, 1)$ -derivation.*

BAB I

PENDAHULUAN

Pada bab ini, diberikan penjelasan mengenai dasar atau alasan dilakukannya sebuah penelitian mengenai topik ini. Bab ini terdiri dari 4 sub bab yaitu latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, dan manfaat penelitian.

1.1 Latar Belakang

Aljabar merupakan salah satu bagian dari ilmu matematika yang mempelajari tentang sifat dan struktur suatu himpunan. Struktur dalam aljabar mengkaji dan membahas tentang suatu himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan satu atau lebih operasi dan memenuhi aksioma-aksioma tertentu.

Sistem yang terdiri dari himpunan tak kosong G dan operasi biner $*$ disebut grupoid. Jika operasi biner dalam grupoid tersebut bersifat asosiatif, maka G disebut semigrup. Selanjutnya, semigrup G yang memuat elemen identitas, yakni sebuah elemen e sedemikian hingga untuk setiap $a \in G$ berlaku $a * e = e * a = a$, disebut monoid. Lebih lanjut, apabila setiap elemen dalam monoid memiliki invers, yakni untuk setiap $a \in G$, terdapat $a^{-1} \in G$ sedemikian sehingga $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$, maka G disebut grup dan dinotasikan dengan $(G,*)$ (Prihandoko, 2016).

Selanjutnya, struktur aljabar yang memiliki dua operasi biner, yakni penjumlahan dan perkalian serta memenuhi aksioma tertentu disebut ring. Pada ring, operasi penjumlahan membentuk suatu grup abelian, sedangkan operasi perkalian bersifat asosiatif dan memiliki elemen identitas dalam beberapa kasus, serta memenuhi hukum distributif perkalian terhadap penjumlahan (Alwi, 2021). Seiring berkembangnya teori aljabar, muncul konsep semiring. Semiring merupakan generalisasi dari ring yang memiliki dua operasi biner, yakni penjumlahan dan perkalian. Pada semiring, syarat invers terhadap operasi penjumlahan dihilangkan (Setyawati, 2017).

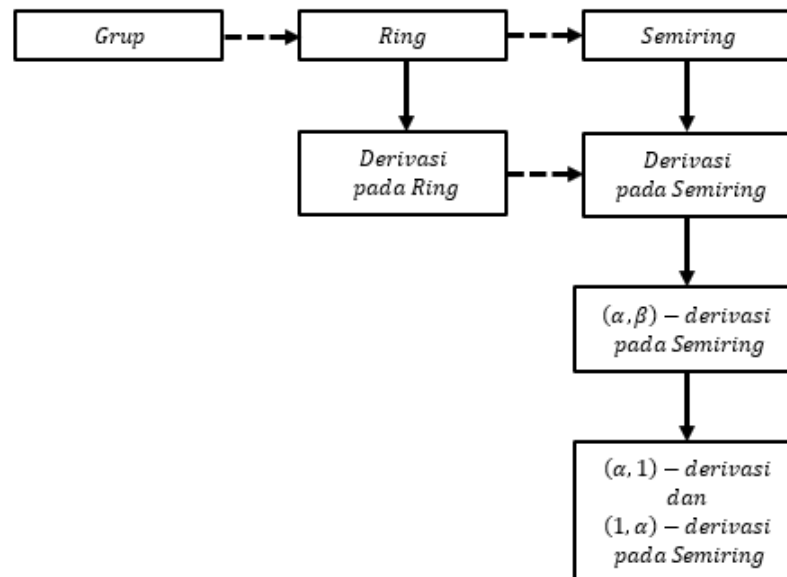
Kajian lebih lanjut terhadap ring dan semiring, diperkenalkan konsep derivasi, yaitu pemetaan yang menggambarkan perubahan suatu elemen terhadap operasi tertentu. Pada ring, derivasi memenuhi aturan Leibniz yang menyatakan bahwa pemetaan terhadap operasi perkaliannya harus memenuhi sifat $d(xy) = d(x)y + xd(y)$. Konsep derivasi pada ring telah banyak dikaji dalam berbagai penelitian. Salah satunya, (Posner, 1957) dalam penelitiannya menunjukkan bahwa setiap derivasi dalam ring prima memiliki sifat khusus yang berkaitan dengan ideal pusatnya, yang kemudian menjadi dasar dalam pengembangan teori derivasi pada ring.

Konsep ini selanjutnya diperluas ke dalam bentuk yang lebih umum, yaitu (α, β) -derivasi, yang didefinisikan sebagai pemetaan terhadap operasi perkaliannya memenuhi persamaan $d(xy) = \alpha(x)d(y) + d(x)\beta(y)$, dimana α dan β adalah automorfisma yang merupakan endomorfisma yang bijektif pada ring (Chaudhry & Thaheem, 2003). Dalam penelitiannya membuktikan bahwa jika d adalah (α, β) -derivasi pada ring semiprima, maka ia harus memiliki hubungan dengan center dan ideal ring tersebut. Mereka juga menunjukkan bahwa jika α dan β adalah automorfisma, maka sifat-sifat derivasi ini dapat digunakan untuk menggambarkan struktur ring yang lebih luas. Lebih lanjut, penelitian (Hvala, 1998) juga memperkenalkan dan mengkaji sifat-sifat (α, β) -derivasi pada ring, yang menunjukkan bahwa pemetaan ini memainkan peran penting dalam memahami sifat-sifat ideal dalam ring.

Salah satu bentuk khusus dari (α, β) -derivasi adalah $(\alpha, 1)$ -derivasi, yang diperoleh dengan mengambil $\beta = 1$. Penelitian terkait telah dilakukan oleh (Haseena & Reddy, 2021) yang menemukan bahwa jika suatu near-ring prima memiliki $(\alpha, 1)$ -reverse derivation yang memenuhi syarat tertentu, maka struktur aditifnya bersifat abelian. Selain itu, jika near-ring tersebut *2-torsion free* dan memenuhi sifat komutatif tertentu, maka near-ring tersebut menjadi ring komutatif. Hasil ini menunjukkan bahwa keberadaan $(\alpha, 1)$ -derivasi dapat memengaruhi sifat-sifat fundamental dari struktur aljabar, terutama dalam hal komutativitas.

Sebagai penguatan terhadap konsep tersebut, penelitian yang dilakukan oleh (Devi dan Chandramouleeswaran, 2014) menjadi acuan utama dalam pengembangan teori derivasi pada semiring. Dalam penelitian ini, diperkenalkan dan dikaji sifat-sifat $(\alpha, 1)$ -derivasi pada semiring, terutama pada semiring prima dan semiring semiprima. Namun, pada penelitian tersebut definisi semiring S yang digunakan adalah $(S, +)$ semigrup, $(S, \cdot)$ semigrup, dan $(S, +, \cdot)$ memenuhi hukum distributif kiri dan kanan. Berbeda dengan penelitian terdahulu yang menggunakan definisi semiring dengan menghilangkan eksistensi elemen identitas dan eksistensi elemen invers. Pada penelitian ini digunakan definisi semiring yang hanya menghilangkan eksistensi elemen invers yaitu $(S, +)$ monoid komutatif, $(S, \cdot)$ semigrup, dan $(S, +, \cdot)$ memenuhi hukum distributif kiri dan kanan (Golan, 1999).

Berdasarkan penelitian sebelumnya, akan dibahas mengenai konsep derivasi pada semiring. Lebih khusus, konsep derivasi yang dijelaskan adalah (α, β) -derivasi pada semiring dengan α, β adalah suatu endomorfisma pada semiring. Lebih lanjut, untuk β sebagai suatu pemetaan identitas akan mendefinisikan konsep derivasi yang baru yaitu $(\alpha, 1)$ -derivasi dan $(1, \alpha)$ -derivasi. Tugas akhir ini, akan membahas definisi, contoh, dan sifat-sifat terkait $(\alpha, 1)$ -derivasi. Selanjutnya, akan diidentifikasi hubungan antara semiring prima dan semiring dengan hukum kanselasi pada suatu $(\alpha, 1)$ -derivasi. Untuk memberikan gambaran yang lebih jelas mengenai hubungan antara konsep-konsep ini, berikut diberikan diagram yang menunjukkan perkembangan dari grup hingga derivasi dalam semiring.



Gambar 1.1 *State of The Art*

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah dijelaskan, adapun beberapa rumusan masalah dalam penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Bagaimana contoh $(\alpha, 1)$ -derivasi pada semiring?
2. Bagaimana hubungan antara semiring S , semiring prima S , dan semiring S dengan hukum kanselasi terhadap $(\alpha, 1)$ -derivasi?

1.3 Tujuan Penelitian

Penelitian ini bertujuan untuk:

1. Menjelaskan contoh $(\alpha, 1)$ -derivasi pada semiring.
2. Menjelaskan hubungan antara semiring S , semiring prima S , dan semiring S dengan hukum kanselasi terhadap $(\alpha, 1)$ -derivasi.

1.4 Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat memberikan manfaat kepada berbagai pihak, diantaranya:

1. Bagi penulis

Melalui penelitian ini diharapkan dapat menambah pengetahuan bagi penulis untuk dapat menjelaskan tentang teori semiring, definisi $(\alpha, 1)$ -derivasi pada semiring dan sifat-sifat yang ada pada $(\alpha, 1)$ -derivasi pada semiring.

2. Bagi pembaca

Melalui penelitian ini diharapkan menjadi tambahan wawasan dan dijadikan referensi untuk penelitian selanjutnya.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini diberikan definisi, teorema, lemma, dan contoh yang mendukung materi pokok untuk mempermudah pemahaman pada bab selanjutnya. Bab ini terdiri dari 3 sub bab yaitu teori grup, teori ring dan derivasi pada ring.

2.1 Teori Grup

Salah satu konsep yang sangat penting dalam aljabar abstrak adalah grup. Berikut diberikan definisi dari operasi biner sebagai landasan untuk memahami teori grup.

Definisi 2.1.1 (Fraleigh, 2003)

Diberikan himpunan tak kosong G . Pemetaan $*$: $G \times G \rightarrow G$ disebut operasi biner pada G apabila memenuhi:

1. $\forall a, b \in G$ berlaku $a * b \in G$.
2. $\forall a_1, b_1, a_2, b_2 \in G$ dengan $a_1 = a_2$ dan $b_1 = b_2$ berakibat $a_1 * b_1 = a_2 * b_2$.

Berdasarkan Definisi 2.1.1 diberikan contoh sebagai berikut.

Contoh 2.1.2

Diberikan himpunan $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ adalah himpunan semua matriks berukuran 2×2 dengan entri-entrinya adalah elemen-elemen di himpunan semua bilangan riil. Struktur $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ terhadap operasi perkalian ($\cdot$) merupakan operasi biner.

Bukti:

Ambil sebarang $A, B, C, D \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$, dengan $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix}$,

$$C = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} d_1 & d_2 \\ d_3 & d_4 \end{bmatrix}.$$

Akan ditunjukkan $\cdot: M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \times M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ merupakan operasi biner, apabila:

1. $\forall A, B \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ berlaku $A \cdot B \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.

Perhatikan bahwa,

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_1b_1 + a_2b_3 & a_1b_2 + a_2b_4 \\ a_3b_1 + a_4b_3 & a_3b_2 + a_4b_4 \end{bmatrix} \\ \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R}).$$

Sehingga diperoleh $A \cdot B \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.

2. $\forall A, B, C, D \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ dengan

$A = C$ artinya $\forall i, j = 1, 2, 3, 4, a_i = c_j$, dan

$B = D$ artinya $\forall i, j = 1, 2, 3, 4, b_i = d_j$, maka

$$AB = CD$$

Perhatikan bahwa,

$$\begin{aligned} A \cdot B &= \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_1b_1 + a_2b_3 & a_1b_2 + a_2b_4 \\ a_3b_1 + a_4b_3 & a_3b_2 + a_4b_4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} c_1d_1 + c_2d_3 & c_1d_2 + c_2d_4 \\ c_3d_1 + c_4d_3 & c_3d_2 + c_4d_4 \end{bmatrix} \\ &= C \cdot D \end{aligned}$$

Berdasarkan uraian 1 dan 2 serta Definisi 2.1.1 terbukti bahwa $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ terhadap operasi perkalian $(\cdot)$ adalah operasi biner. ■

Selanjutnya, diberikan contoh lain sebagai berikut.

Contoh 2.1.3

Diberikan himpunan $\mathbb{Z}$ adalah himpunan semua bilangan bulat. Operasi pembagian $(\div)$ pada himpunan $\mathbb{Z}$ bukan merupakan operasi biner.

Bukti:

Pilih $3, 5 \in \mathbb{Z}$ sedemikian sehingga $3 \div 5 = \frac{3}{5} \notin \mathbb{Z}$.

Sehingga $\mathbb{Z}$ terhadap operasi pembagian $(\div)$ bukan operasi biner. ■

Selanjutnya, operasi biner $(G, *)$ yang memenuhi sifat asosiatif akan membentuk suatu struktur baru yang disebut semigrup. Diberikan definisi semigrup sebagai berikut.

Definisi 2.1.4 (Fraleigh, 2003)

Diberikan G himpunan tak kosong dan $*$: $G \times G \rightarrow G$. Himpunan G yang dilengkapi dengan operasi biner $*$ serta memenuhi sifat asosiatif disebut dengan semigrup.

Berdasarkan Definisi 2.1.4 diberikan contoh sebagai berikut.

Contoh 2.1.5

Diberikan himpunan semua bilangan asli $\mathbb{N}$ dan diberikan operasi penjumlahan $(+)$ pada $\mathbb{N}$. Struktur $\mathbb{N}$ terhadap operasi penjumlahan $(+)$ adalah semigrup.

Bukti:

Ambil sebarang $a, b, c \in \mathbb{N}$. Akan ditunjukkan $\mathbb{N}$ terhadap operasi penjumlahan $(+)$ adalah semigrup.

1. Himpunan $\mathbb{N}$ tertutup terhadap operasi penjumlahan $(+)$, yaitu $\forall a, b \in \mathbb{N}$ berlaku $a + b \in \mathbb{N}$.
2. Himpunan $\mathbb{N}$ bersifat asosiatif terhadap operasi penjumlahan $(+)$, yaitu $\forall a, b, c \in \mathbb{N}$ berlaku $a + (b + c) = (a + b) + c$.

Berdasarkan 1-2 dan Definisi 2.1.4 terbukti bahwa $\mathbb{N}$ terhadap operasi penjumlahan $(+)$ adalah semigrup. ■

Lebih lanjut, diberikan definisi semigrup yang lebih khusus sebagai berikut.

Definisi 2.1.6 (Fraleigh, 2003)

Diberikan semigrup $(G, *)$. Semigrup G disebut komutatif apabila $\forall a, b \in G$ berlaku $a * b = b * a$.

Berdasarkan Definisi 2.1.6 diberikan contoh sebagai berikut.

Contoh 2.1.7

Diberikan himpunan semua bilangan asli $\mathbb{N}$ dan diberikan operasi penjumlahan $(+)$ pada $\mathbb{N}$. Struktur $\mathbb{N}$ terhadap operasi penjumlahan $(+)$ merupakan semigrup komutatif.

Bukti:

Berdasarkan Contoh 2.1.5, $(\mathbb{N}, +)$ merupakan semigrup. Selanjutnya, akan ditunjukkan $(\mathbb{N}, +)$ membentuk semigrup komutatif. Ambil sebarang $a, b \in \mathbb{N}$ berlaku $a + b = b + a$.

Berdasarkan Definisi 2.1.6 terbukti bahwa $\mathbb{N}$ terhadap operasi penjumlahan $(+)$ adalah semigrup komutatif. ■

Seperti halnya himpunan yang memiliki himpunan bagian atau subset, pada semigrup juga demikian. Berikut diberikan definisi dari subsemigrup.

Definisi 2.1.8 (Fraleigh, 2003)

Diberikan semigrup $(G, *)$. Sebuah himpunan tak kosong T dari G merupakan subsemigrup apabila $(T, *)$ juga semigrup.

Berdasarkan Definisi 2.1.8 diberikan contoh sebagai berikut.

Contoh 2.1.9

Diberikan $(\mathbb{N}, +)$ adalah semigrup, dan $2\mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}$. Struktur $(2\mathbb{N}, +)$ merupakan subgrup dari $(\mathbb{N}, +)$.

Bukti:

Diketahui pada Contoh 2.1.5, $(\mathbb{N}, +)$ adalah semigrup. Akan ditunjukkan bahwa $(2\mathbb{N}, +)$ merupakan subgrup dari $(\mathbb{N}, +)$, dengan $(2\mathbb{N}, +)$ haruslah semigrup.

Ambil sebarang $2a, 2b, 2c \in 2\mathbb{N}$.

1. Perhatikan bahwa, $2a + 2b \in 2\mathbb{N}$. Dengan demikian, $2\mathbb{N}$ terhadap operasi penjumlahan $(+)$ tertutup.
2. Perhatikan bahwa,

$$\begin{aligned} 2a + (2b + 2c) &= 2a + 2(b + c) \\ &= 2(a + b + c) \\ &= 2(a + b) + 2c \\ &= (2a + 2b) + 2c \end{aligned}$$

Dengan demikian, $2\mathbb{N}$ terhadap operasi penjumlahan $(+)$ bersifat asosiatif.

Berdasarkan uraian 1-2 dan Definisi 2.1.8 terbukti bahwa $2\mathbb{N}$ terhadap operasi penjumlahan $(+)$ merupakan semigrup. Karena $(2\mathbb{N}, +)$ adalah semigrup dan $2\mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}$, terbukti bahwa $(2\mathbb{N}, +)$ subsemigrup $(\mathbb{N}, +)$. ■

Selanjutnya, apabila semigrup memenuhi aksioma eksistensi terhadap elemen identitas dapat dibentuk suatu struktur baru yang disebut monoid. Diberikan definisi monoid sebagai berikut.

Definisi 2.1.10 (Lisapaly & Persulesy, 2011)

Diberikan G himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan operasi biner $*$ disebut monoid apabila memenuhi asosiatif dan memiliki identitas pada G .

Berdasarkan Definisi 2.1.10 diberikan contoh sebagai berikut.

Contoh 2.1.11

Diberikan himpunan semua bilangan bulat tak negatif $\mathbb{Z}_0^+$ dan diberikan operasi penjumlahan $(+)$ pada $\mathbb{Z}_0^+$. Struktur $\mathbb{Z}_0^+$ terhadap operasi penjumlahan $(+)$ adalah monoid.

Bukti:

Ambil sebarang $a, b, c \in \mathbb{Z}_0^+$. Akan ditunjukkan $\mathbb{Z}_0^+$ terhadap operasi penjumlahan $(+)$ adalah monoid.

1. Himpunan $\mathbb{Z}_0^+$ tertutup terhadap operasi penjumlahan $(+)$, yaitu $\forall a, b \in \mathbb{Z}_0^+$ berlaku $a + b \in \mathbb{Z}_0^+$.
2. Himpunan $\mathbb{Z}_0^+$ bersifat asosiatif terhadap operasi penjumlahan $(+)$, yaitu $\forall a, b, c \in \mathbb{Z}_0^+$ berlaku $a + (b + c) = (a + b) + c$.
3. Himpunan $\mathbb{Z}_0^+$ memiliki eksistensi elemen identitas terhadap operasi penjumlahan $(+)$, yaitu $\exists 0 \in \mathbb{Z}_0^+$ sehingga $\forall a \in \mathbb{Z}_0^+$ berlaku $a + 0 = a = 0 + a$.

Berdasarkan 1-3 dan Definisi 2.1.10 terbukti bahwa $\mathbb{Z}_0^+$ terhadap operasi penjumlahan $(+)$ adalah monoid. ■

Seperti halnya semigrup komutatif, sifat komutatif dapat diberikan pada suatu monoid. Diberikan definisi monoid komutatif sebagai berikut.

Definisi 2.1.12 (Lisapaly & Persulesy, 2011)

Monoid $(G, *)$ disebut monoid komutatif apabila $\forall a, b \in G$ berlaku $a * b = b * a$.

Berdasarkan Definisi 2.1.12 diberikan contoh sebagai berikut.

Contoh 2.1.13

Diberikan himpunan semua bilangan bulat tak negatif $\mathbb{Z}_0^+$ dan diberikan operasi penjumlahan $(+)$ pada $\mathbb{Z}_0^+$. Struktur $\mathbb{Z}_0^+$ terhadap operasi penjumlahan $(+)$ merupakan monoid komutatif.

Bukti:

Berdasarkan Contoh 2.1.11, $(\mathbb{Z}_0^+, +)$ merupakan monoid. Selanjutnya, akan ditunjukkan $(\mathbb{Z}_0^+, +)$ membentuk monoid komutatif. Ambil sebarang $a, b \in \mathbb{Z}_0^+$ berlaku $a + b = b + a$.

Berdasarkan Definisi 2.1.12, terbukti bahwa $\mathbb{Z}_0^+$ terhadap operasi penjumlahan $(+)$ merupakan monoid komutatif. ■

Lebih lanjut, apabila monoid memenuhi aksioma eksistensi terhadap elemen invers dapat dibentuk suatu struktur baru yang disebut grup. Diberikan definisi grup sebagai berikut.

Defenisi 2.1.14 (Tahmir, 2004)

Diberikan G adalah himpunan tak kosong dan $*$ adalah operasi biner. Himpunan G yang dilengkapi dengan operasi $*$ disebut grup apabila memenuhi:

1. Asosiatif terhadap operasi biner $*$ yaitu $\forall a, b, c \in G$ berlaku $a * (b * c) = (a * b) * c$.
2. Eksistensi elemen identitas yaitu $\exists e \in G$ sehingga $\forall a \in G$ berlaku $a * e = a = e * a$.
3. Eksistensi elemen invers yaitu $\forall a \in G$ sehingga $\exists a^{-1} \in G$ berlaku $a * a^{-1} = e = a^{-1} * a$.

Berdasarkan Definisi 2.1.14 diberikan contoh sebagai berikut.

Contoh 2.1.15

Diberikan himpunan semua bilangan bulat $\mathbb{Z}$ dan diberikan operasi penjumlahan (+) pada $\mathbb{Z}$. Struktur $\mathbb{Z}$ terhadap operasi penjumlahan (+) merupakan grup.

Bukti:

Ambil sebarang $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Akan ditunjukkan $\mathbb{Z}$ terhadap operasi penjumlahan (+) merupakan grup.

1. Himpunan $\mathbb{Z}$ tertutup terhadap operasi penjumlahan (+), yaitu $\forall a, b \in \mathbb{Z}$ berlaku $a + b \in \mathbb{Z}$.
2. Himpunan $\mathbb{Z}$ bersifat asosiatif terhadap operasi penjumlahan (+), yaitu $\forall a, b, c \in \mathbb{Z}$ berlaku $a + (b + c) = (a + b) + c$.
3. Himpunan $\mathbb{Z}$ memiliki eksistensi elemen identitas terhadap operasi penjumlahan (+), yaitu $\exists 0 \in \mathbb{Z}$ sehingga $\forall a \in \mathbb{Z}$ berlaku $a + 0 = a = 0 + a$.
4. Himpunan $\mathbb{Z}$ memiliki eksistensi elemen invers terhadap operasi penjumlahan (+), yaitu $\forall a \in \mathbb{Z}$ sehingga $\exists -a \in \mathbb{Z}$ berlaku $a + (-a) = 0 = -a + a$.

Berdasarkan uraian 1-4 dan Definisi 2.1.14 terbukti bahwa $\mathbb{Z}$ terhadap operasi penjumlahan (+) merupakan grup.

Lebih lanjut, berdasarkan Contoh 2.1.15, berlaku hal yang sama untuk himpunan semua bilangan riil ($\mathbb{R}$), dan himpunan semua bilangan kompleks ($\mathbb{C}$) terhadap operasi (+) juga merupakan grup. ■

Selanjutnya, diberikan contoh lain grup sebagai berikut.

Contoh 2.1.16

Diberikan himpunan $M_{2 \times 2}^1(\mathbb{R})$ adalah himpunan semua matriks berukuran 2×2 dengan entri-entrinya adalah elemen-elemen di himpunan semua bilangan riil, yang didefinisikan dengan

$$M_{2 \times 2}^1(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \mid a, c \neq 0 \right\}.$$

Struktur $M_{2 \times 2}^1(\mathbb{R})$ terhadap operasi perkalian ($\cdot$) merupakan grup.

Bukti:

Ambil sebarang $A, B, C \in M_{2 \times 2}^1(\mathbb{R})$ dengan $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ 0 & a_3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ 0 & b_3 \end{bmatrix}$, dan $C = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ 0 & c_3 \end{bmatrix}$.

Akan ditunjukkan $M_{2 \times 2}^1(\mathbb{R})$ terhadap operasi perkalian $(\cdot)$ merupakan grup.

1. Himpunan $M_{2 \times 2}^1(\mathbb{R})$ tertutup terhadap operasi perkalian $(\cdot)$, yaitu $\forall A, B \in M_{2 \times 2}^1(\mathbb{R})$ berlaku $A \cdot B \in M_{2 \times 2}^1(\mathbb{R})$.

Perhatikan bahwa,

$$\begin{aligned} A \cdot B &= \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ 0 & a_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ 0 & b_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 + a_2 b_3 \\ 0 & a_3 b_3 \end{bmatrix} \\ &\in M_{2 \times 2}^1(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

Dengan demikian, $(M_{2 \times 2}^1(\mathbb{R}), \cdot)$ tertutup.

2. Himpunan $M_{2 \times 2}^1(\mathbb{R})$ bersifat asosiatif terhadap operasi perkalian $(\cdot)$, yaitu $\forall A, B, C \in M_{2 \times 2}^1(\mathbb{R})$ berlaku $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$.

Perhatikan bahwa,

$$\begin{aligned} A \cdot (B \cdot C) &= \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ 0 & a_3 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ 0 & b_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ 0 & c_3 \end{bmatrix} \right) \\ &= \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ 0 & a_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 c_1 & b_1 c_2 + b_2 c_3 \\ 0 & b_3 c_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_1 b_1 c_1 & a_1 b_1 c_2 + a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_3 \\ 0 & a_3 b_3 c_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 + a_2 b_3 \\ 0 & a_3 b_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ 0 & c_3 \end{bmatrix} \\ &= \left(\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ 0 & a_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ 0 & b_3 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ 0 & c_3 \end{bmatrix} \\ &= (A \cdot B) \cdot C \end{aligned}$$

Dengan demikian, $(M_{2 \times 2}^1(\mathbb{R}), \cdot)$ bersifat asosiatif.

3. Himpunan $M_{2 \times 2}^1(\mathbb{R})$ memiliki eksistensi elemen identitas terhadap operasi perkalian $(\cdot)$, $\exists I \in M_{2 \times 2}^1(\mathbb{R})$ dengan $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ sehingga $\forall A \in M_{2 \times 2}^1(\mathbb{R})$ berlaku $A \cdot I = A = I \cdot A$.

Perhatikan bahwa,

$$\begin{aligned}
 A \cdot I &= \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ 0 & a_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ 0 & a_3 \end{bmatrix} \\
 &= A \\
 &= \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ 0 & a_3 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ 0 & a_3 \end{bmatrix} \\
 &= I \cdot A
 \end{aligned}$$

Dengan demikian, $(M_{2 \times 2}^1(\mathbb{R}), \cdot)$ memiliki eksistensi elemen identitas.

4. Himpunan $M_{2 \times 2}^1(\mathbb{R})$ memiliki eksistensi elemen invers terhadap operasi perkalian $(\cdot)$, yaitu ambil sebarang $A \in M_{2 \times 2}^1(\mathbb{R})$ dengan $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ 0 & a_3 \end{bmatrix}$ |

$$a_1, a_3 \neq 0, \quad \exists A^{-1} \in M_{2 \times 2}^1(\mathbb{R}) \quad \text{dengan} \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_1} & -\frac{a_2}{a_1 a_3} \\ 0 & \frac{1}{a_3} \end{bmatrix} \quad \text{sedemikian}$$

sehingga berlaku $A \cdot A^{-1} = I = A^{-1} \cdot A$.

Perhatikan bahwa,

$$\begin{aligned}
 A \cdot A^{-1} &= \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ 0 & a_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{a_1} & -\frac{a_2}{a_1 a_3} \\ 0 & \frac{1}{a_3} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= I \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{1}{a_1} & -\frac{a_2}{a_1 a_3} \\ 0 & \frac{1}{a_3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ 0 & a_3 \end{bmatrix} \\
 &= A^{-1} \cdot A
 \end{aligned}$$

Dengan demikian, $(M_{2 \times 2}^1(\mathbb{R}), \cdot)$ memiliki eksistensi elemen invers.

Berdasarkan uraian 1-4 dan Definisi 2.1.14 terbukti bahwa $M_{2 \times 2}^1(\mathbb{R})$ terhadap operasi perkalian $(\cdot)$ merupakan grup. ■

Seperti halnya monoid komutatif, sifat komutatif dapat diberikan pada grup. Diberikan definisi grup komutatif sebagai berikut.

Definisi 2.1.17 (Tahmir, 2004)

Diberikan grup $(G, *)$. Grup G disebut grup komutatif apabila $\forall a, b \in G$ berlaku $a * b = b * a$.

Berdasarkan Definisi 2.1.17 diberikan contoh sebagai berikut.

Contoh 2.1.18

Diberikan himpunan semua bilangan bulat $\mathbb{Z}$ dan diberikan operasi penjumlahan $(+)$ pada $\mathbb{Z}$. Struktur $\mathbb{Z}$ terhadap operasi penjumlahan $(+)$ merupakan grup komutatif.

Bukti:

Berdasarkan Contoh 2.1.15, $(\mathbb{Z}, +)$ merupakan grup. Selanjutnya, akan ditunjukkan $(\mathbb{Z}, +)$ merupakan grup komutatif, yaitu ambil sebarang $a, b \in \mathbb{Z}$ maka $a + b = b + a$.

Berdasarkan Definisi 2.1.17, terbukti bahwa $\mathbb{Z}$ terhadap operasi penjumlahan $(+)$ merupakan grup komutatif. ■

Selanjutnya, diberikan contoh lain sebagai berikut.

Contoh 2.1.19

Diberikan himpunan $M_{2 \times 2}^1(\mathbb{R})$ adalah himpunan semua matriks berukuran 2×2 dengan entri-entrinya adalah elemen-elemen di himpunan semua bilangan riil, yang didefinisikan dengan

$$M_{2 \times 2}^1(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \mid a, c \neq 0 \right\}.$$

Struktur $M_{2 \times 2}^1(\mathbb{R})$ terhadap operasi perkalian $(\cdot)$ bukan merupakan grup komutatif.

Bukti:

Berdasarkan Contoh 2.1.16, ditunjukkan $(M_{2 \times 2}^1(\mathbb{R}), \cdot)$ merupakan grup. Lebih lanjut, pilih $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \in M_{2 \times 2}^1(\mathbb{R})$ maka

$$\begin{aligned} A \cdot B &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 0 & -18 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

disisi lain,

$$\begin{aligned} B \cdot A &= \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 4 & 23 \\ 0 & -18 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Oleh karena $\begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 0 & -18 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 4 & 23 \\ 0 & -18 \end{bmatrix}$, maka $M_{2 \times 2}^1(\mathbb{R})$ terhadap operasi perkalian $(\cdot)$ bukan merupakan grup komutatif. ■

Berdasarkan fenomena pada grup, sifat ketunggalan elemen identitas dan elemen invers pada grup diberikan pada Teorema berikut.

Teorema 2.1.20 (Dummit & Foote, 2004)

Diberikan grup $(G, *)$.

- i. Jika $e \in G$ adalah elemen identitas, maka e tunggal.
- ii. Jika $\forall a \in G, \exists a^{-1} \in G$ yang merupakan elemen invers dari a , maka a^{-1} tunggal.

Bukti:

- i. Andaikan elemen identitas di G tidak tunggal yaitu $\exists e, e' \in G$ dimana $e \neq e'$. Jika $e \in G$ dipandang sebagai elemen identitas di G , maka untuk $e' \in G$ berlaku $e' * e = e' = e * e'$. Lebih lanjut, jika $e' \in G$ dipandang sebagai elemen identitas di G , maka untuk $e \in G$ berlaku $e' * e = e = e * e'$. Dengan demikian, diperoleh bahwa $e' * e = e' = e$ dan $e * e' = e' = e$. Kontradiksi dari yang diketahui bahwa $e \neq e'$. Pengandaian salah, haruslah elemen identitas di G tunggal.

- ii. Diambil sebarang $a \in G$. Andaikan elemen invers di G tidak tunggal yaitu $\exists a', a'' \in G$ dimana $a' \neq a''$ memenuhi $a * a' = e = a' * a$ dan $a * a'' = e = a'' * a$.

Perhatikan bahwa,

$$\begin{aligned} a' &= a' * e \\ &= a' * (a * a'') \\ &= (a' * a) * a'' \\ &= e * a'' \\ &= a'' \end{aligned}$$

Dengan demikian, diperoleh $a' = a''$. Kontradiksi dari yang diketahui bahwa $a' \neq a''$. Pengandaian salah, haruslah elemen invers di G tunggal. ■

Selanjutnya, diberikan sifat lainnya pada grup sebagai berikut.

Teorema 2.1.21 (Dummit & Foote, 2004)

Diberikan grup $(G, *)$.

- i. Jika $\forall a \in G$ maka $a = (a^{-1})^{-1}$.
- ii. Jika $\forall a, b \in G$, maka $(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$.
- iii. Jika $\forall a, b, c \in G$, jika $a * c = b * c$ atau $c * a = c * b$, maka $a = b$.

Bukti:

- i. Diambil sebarang $a \in G$. Karena $(G, *)$ grup, maka $\exists a^{-1} \in G$ sedemikian sehingga berlaku $a * a^{-1} = e = a^{-1} * a$. Oleh karena setiap elemen di G memiliki invers, maka untuk $a^{-1} \in G$ terdapat $(a^{-1})^{-1} \in G$ sedemikian sehingga $a^{-1} * (a^{-1})^{-1} = e = (a^{-1})^{-1} * a^{-1}$.

Berdasarkan Definisi 2.1.14 (3) maka $a = (a^{-1})^{-1}$.

- ii. Diambil sebarang $a, b \in G$. Karena $(G, *)$ grup, maka untuk $a * b \in G$ ada $(a * b)^{-1} \in G$.

Perhatikan bahwa,

$$\begin{aligned} (a * b) * (b^{-1} * a^{-1}) &= ((a * b) * b^{-1}) * a^{-1} \\ &= (a * (b * b^{-1})) * a^{-1} \\ &= (a * e) * a^{-1} \end{aligned}$$

$$= a * a^{-1}$$

$$= e$$

disisi lain,

$$(b^{-1} * a^{-1}) * (a * b) = b^{-1} * (a^{-1} * a) * b$$

$$= b^{-1} * e * b$$

$$= b^{-1} * b$$

$$= e$$

Oleh karena $(a * b) * (b^{-1} * a^{-1}) = (b^{-1} * a^{-1}) * (a * b) = e$, akibatnya $(b^{-1} * a^{-1}) \in G$ adalah invers dari $(a * b) \in G$ dan karena $(a * b)^{-1} \in G$ juga merupakan invers dari $(a * b) \in G$. Berdasarkan Teorema 2.1.20 (ii) diperoleh bahwa $(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$.

- iii. Diambil sebarang $a, b, c \in G$, dengan $a * c = b * c$ atau $c * a = c * b$.

Perhatikan bahwa, untuk $a * c = b * c$, ada $c^{-1} \in G$ diperoleh

$$(a * c) * c^{-1} = (b * c) * c^{-1}$$

$$a * (c * c^{-1}) = b * (c * c^{-1})$$

$$a * e = b * e$$

$$a = b$$

disisi lain, untuk $c * a = c * b$, ada $c^{-1} \in G$ diperoleh

$$c^{-1} * (c * a) = c^{-1} * (c * b)$$

$$(c^{-1} * c) * a = (c^{-1} * c) * b$$

$$e * a = e * b$$

$$a = b$$

Dengan demikian, terbukti bahwa jika $a * c = b * c$ atau $c * a = c * b$, maka $a = b$. ■

Seperti halnya semigrup yang memiliki subsemigrup, pada grup juga demikian. Berikut diberikan definisi dari subgrup.

Definisi 2.1.22 (Dummit & Foote, 2004)

Diberikan grup $(G, *)$, dan $H \subseteq G$. Himpunan tak kosong H di G disebut subgrup dari $(G, *)$ apabila $(H, *)$ juga merupakan grup.

Berdasarkan Definisi 2.1.22 diberikan contoh sebagai berikut.

Contoh 2.1.23

Diberikan $(\mathbb{R}, +)$ adalah grup, dan $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$. Grup $(\mathbb{Z}, +)$ merupakan subgrup dari $(\mathbb{R}, +)$.

Bukti:

Diketahui pada Contoh 2.1.15, $(\mathbb{Z}, +)$ adalah grup. Sebab $(\mathbb{Z}, +)$ adalah grup dan $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$ maka $(\mathbb{Z}, +)$ subgrup dari $(\mathbb{R}, +)$. ■

Lebih lanjut, berikut akan ditunjukkan teorema terkait subgrup di G .

Teorema 2.1.24 (Dummit & Foote, 2004)

Diberikan grup $(G, *)$, dan $H \subseteq G$. Himpunan H merupakan subgrup dari G jika dan hanya jika $\forall a, b \in H$ berakibat $a * b^{-1} \in H$.

Bukti:

$\Rightarrow$ Misalkan $H \subseteq G$, $H \neq \emptyset$, G grup dan H subgrup dari G . Ambil sebarang $a, b \in H$. Karena H subgrup dari G , maka $\exists b^{-1} \in H$ sedemikian sehingga berdasarkan sifat tertutup dari H diperoleh bahwa $a * b^{-1} \in H$.

$\Leftarrow$ Misalkan $H \subseteq G$, $H \neq \emptyset$, G grup dan H subgrup dari G . $\forall a, b \in H$ berlaku $a * b^{-1} \in H$. Akan ditunjukkan bahwa H subgrup dari G . Ambil sebarang $a \in H$ dari yang diketahui $a * a^{-1} = e \in H$ sehingga elemen identitas di H ada. Selanjutnya, ambil $a = e \in H$ dan $b \in H$ sehingga diperoleh $e * b^{-1} = b^{-1} \in H$ yang merupakan elemen invers di H . Lebih lanjut, ambil sebarang $a \in H$ dan $b^{-1} \in H$. Sehingga $a * (b^{-1})^{-1} = a * b \in H$. Hal ini menunjukkan bahwa H tertutup terhadap operasi yang sama di G .

Oleh karena H tertutup terhadap operasi yang sama di G serta sifat asosiatif yang diwariskan dari G , eksistensi elemen identitas $e \in H$ dan eksistensi elemen invers di H maka H membentuk grup terhadap operasi yang sama pada G . Dengan demikian, diperoleh H adalah subgrup dari G . ■

2.2 Teori Ring

Ring adalah suatu himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan dua buah operasi biner, yaitu penjumlahan (+) dan perkalian ($\cdot$) serta memenuhi aksioma tertentu. Berikut diberikan definisi ring.

Defenisi 2.2.1 (Malik et al., 2007)

Diberikan himpunan tak kosong R yang dilengkapi dengan operasi biner penjumlahan (+) dan perkalian ($\cdot$). Himpunan R disebut ring apabila memenuhi

1. Asosiatif, yaitu $\forall a, b, c \in R$ berlaku $(a + b) + c = a + (b + c)$ dan $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.
2. Eksistensi elemen identitas, yaitu $\exists e = 0 \in R$ sehingga $\forall a \in R$ berlaku $a + 0 = a = 0 + a$.
3. Eksistensi elemen invers, yaitu $\forall a \in R$ sehingga $\exists a^{-1} = -a \in R$ berlaku $a + (-a) = (-a) + a = 0$.
4. Komutatif, yaitu $\forall a, b \in R$ berlaku $a + b = b + a$.
5. Hukum distributif kiri dan kanan, yaitu $\forall a, b, c \in R$ berlaku $a \cdot (b + c) = ab + ac$ dan $(a + b) \cdot c = ac + bc$.

Dengan kata lain, ring R dinotasikan dengan $(R, +, \cdot)$ disebut ring apabila

1. $(R, +)$ grup komutatif
2. $(R, \cdot)$ semigrup
3. $(R, +, \cdot)$ memenuhi hukum distributif kiri dan kanan

Berdasarkan Definisi 2.2.1 diberikan contoh sebagai berikut.

Contoh 2.2.2

Diberikan himpunan semua bilangan bulat $\mathbb{Z}$ dan diberikan operasi penjumlahan (+) dan perkalian ($\cdot$) pada $\mathbb{Z}$. Struktur $\mathbb{Z}$ terhadap operasi penjumlahan (+) dan perkalian ($\cdot$) merupakan ring.

Bukti:

Ambil sebarang $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Ditunjukkan $\mathbb{Z}$ terhadap operasi penjumlahan (+) dan perkalian ($\cdot$) adalah ring. Akan ditunjukkan dahulu $(\mathbb{Z}, +)$ adalah grup komutatif.

Perhatikan bahwa,

1. Himpunan $\mathbb{Z}$ tertutup terhadap operasi penjumlahan (+), yaitu $\forall a, b \in \mathbb{Z}$ berlaku $a + b \in \mathbb{Z}$.
2. Himpunan $\mathbb{Z}$ bersifat asosiatif terhadap operasi penjumlahan (+), yaitu $\forall a, b, c \in \mathbb{Z}$ berlaku $a + (b + c) = (a + b) + c$.
3. Himpunan $\mathbb{Z}$ memiliki eksistensi elemen identitas terhadap operasi penjumlahan (+), yaitu $\exists 0 \in \mathbb{Z}$ sehingga $\forall a \in \mathbb{Z}$ berlaku $a + 0 = a = 0 + a$.
4. Himpunan $\mathbb{Z}$ memiliki eksistensi elemen invers terhadap operasi penjumlahan (+), yaitu $\forall a \in \mathbb{Z}$ sehingga $\exists -a \in \mathbb{Z}$ sehingga berlaku $a + (-a) = (-a) + a = 0$.
5. Himpunan $\mathbb{Z}$ bersifat komutatif terhadap operasi penjumlahan (+), yaitu $\forall a, b \in \mathbb{Z}$ berlaku $a + b = b + a$.

Berdasarkan 1-5 dan Definisi 2.1.17 terbukti bahwa $(\mathbb{Z}, +)$ grup komutatif.

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa $(\mathbb{Z}, \cdot)$ semigrup.

Perhatikan bahwa,

1. Himpunan $\mathbb{Z}$ tertutup terhadap operasi perkalian ($\cdot$), yaitu $a, b \in \mathbb{Z}$ berlaku $a \cdot b \in \mathbb{Z}$.
2. Himpunan $\mathbb{Z}$ bersifat asosiatif terhadap operasi perkalian ($\cdot$), yaitu $\forall a, b, c \in \mathbb{Z}$ berlaku $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$.

Berdasarkan uraian 1-2 dan Definisi 2.1.4 terbukti bahwa $(\mathbb{Z}, \cdot)$ semigrup.

Terakhir, akan ditunjukkan bahwa $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ memenuhi hukum distributif kiri dan kanan.

Perhatikan bahwa,

1. Himpunan $\mathbb{Z}$ memenuhi hukum distributif kiri terhadap operasi penjumlahan (+) dan perkalian ($\cdot$), yaitu $\forall a, b, c \in \mathbb{Z}$ berlaku $a \cdot (b + c) = ab + ac$.
2. Himpunan $\mathbb{Z}$ memenuhi hukum distributif kanan terhadap operasi penjumlahan (+) dan perkalian ($\cdot$), yaitu $\forall a, b, c \in \mathbb{Z}$ berlaku $(a + b) \cdot c = ac + bc$.

Berdasarkan uraian 1-2 terbukti bahwa $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ memenuhi hukum distributif kiri dan kanan.

Jadi, oleh karena $(\mathbb{Z}, +)$ grup komutatif, $(\mathbb{Z}, \cdot)$ semigrup dan $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ memenuhi hukum distributif kiri dan kanan, maka terbukti bahwa $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ merupakan ring. ■

Seperti halnya pada grup yang memiliki grup komutatif, pada ring juga berlaku demikian. Diberikan definisi ring komutatif sebagai berikut.

Definisi 2.2.3 (Malik et al., 2007)

Diberikan ring $(R, +, \cdot)$. Ring R disebut komutatif apabila $\forall a, b \in R$ apabila $ab = ba$. Lebih lanjut berdasarkan Definisi 2.2.3 suatu ring jika tidak komutatif disebut ring non-komutatif.

Berdasarkan Definisi 2.2.3 diberikan contoh sebagai berikut.

Contoh 2.2.4

Diberikan himpunan semua bilangan bulat $\mathbb{Z}$ dan diberikan operasi penjumlahan $(+)$ dan perkalian $(\cdot)$ pada $\mathbb{Z}$. Struktur $\mathbb{Z}$ terhadap operasi penjumlahan $(+)$ dan perkalian $(\cdot)$ merupakan ring komutatif.

Bukti:

Berdasarkan Contoh 2.2.2, $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ merupakan ring. Selanjutnya, akan ditunjukkan $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ merupakan ring komutatif, yaitu ambil sebarang $a, b \in \mathbb{Z}$ berlaku maka $ab = ba$.

Berdasarkan Definisi 2.2.3, terbukti bahwa $\mathbb{Z}$ terhadap operasi penjumlahan $(+)$ dan perkalian $(\cdot)$ merupakan ring komutatif. ■

Oleh karena sifat elemen identitas yang tunggal, maka elemen identitas pada operasi perkalian ring R disebut dengan elemen satuan. Diberikan definisinya sebagai berikut.

Definisi 2.2.5 (Malik et al., 2007)

Diberikan ring $(R, +, \cdot)$. Ring R disebut ring dengan elemen satuan apabila $(R, \cdot)$ memiliki eksistensi elemen identitas.

Berdasarkan definisi 2.2.5 diberikan contoh sebagai berikut.

Contoh 2.2.6

Diberikan $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ merupakan ring. Struktur $\mathbb{Z}$ terhadap operasi penjumlahan $(+)$ dan operasi perkalian $(\cdot)$ merupakan semiring dengan elemen satuan.

Bukti:

Ambil sebarang $a \in \mathbb{Z}$, terdapat $e = 1 \in \mathbb{Z}$ sedemikian sehingga berlaku $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$. Sehingga terbukti $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ merupakan ring dengan elemen satuan.

Seperti halnya grup yang memiliki subgrup, pada ring juga demikian. Berikut diberikan definisi dari subring.

Definisi 2.2.7 (Malik et al., 2007)

Diberikan ring $(R, +, \cdot)$ dan $P \subseteq R, P \neq \emptyset$. Himpunan P dengan operasi yang sama pada R disebut subring dari R apabila memenuhi

- $(P, +)$ grup komutatif
- $(P, \cdot)$ semigrup
- $(P, +, \cdot)$ memenuhi hukum distributif kiri dan kanan

Berdasarkan Definisi 2.2.7 diberikan contoh sebagai berikut.

Contoh 2.2.8

Diberikan $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ adalah ring, dan $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$. Ring $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ merupakan subring dari $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.

Bukti:

Diketahui pada Contoh 2.2.2, $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ adalah ring. Sebab $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ adalah ring dan $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$ maka $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ subring dari $(\mathbb{R}, +, \cdot)$. ■

Lebih lanjut, berikut akan ditunjukkan teorema terkait subring di R .

Teorema 2.2.9 (Malik et al., 2007)

Diberikan ring $(R, +, \cdot)$ dan $P \subseteq R$. Himpunan tak kosong P disebut subring dari R jika dan hanya jika $\forall x, y \in P$ berlaku $x - y \in P$ dan $xy \in P$.

Bukti:

$\Rightarrow$ Diketahui $(R, +, \cdot)$ dan $P \subseteq R$ subring. Akan ditunjukkan $\forall x, y \in P$ berlaku $x - y \in P$ dan $xy \in P$. Ambil sebarang $x, y \in P$, karena P subring dari R maka $x - y \in P$ dan $xy \in P$.

$\Leftarrow$ Diketahui $\forall x, y \in P$ berlaku $x - y \in P$ dan $xy \in P$. Akan ditunjukkan P subring di R . Berdasarkan Teorema 2.1.24, diperoleh bahwa $\forall x, y \in P$ berlaku $x - y \in P$, sehingga $(P, +)$ subgrup di $(R, +)$. Selanjutnya, $\forall x, y \in P$ berlaku $xy \in P$, sehingga $(P, \cdot)$ tertutup dan asosiatif. Lebih lanjut, $(P, +, \cdot)$ memenuhi hukum distributif kiri dan kanan. Dengan demikian, $(P, +, \cdot)$ subring di $(R, +, \cdot)$. ■

Seperti halnya grup, kita mengenal subgrup normal yang memungkinkan kita membentuk grup hasil bagi. Sama halnya dalam ring kita punya konsep yang serupa, namun subring tidaklah cukup sehingga diperlukan konsep ideal yang merupakan subring khusus untuk mencapai tujuan tersebut. Berikut diberikan definisi dari ideal.

Definisi 2.2.10 (Romsery et al., 2015)

Diberikan ring $(R, +, \cdot)$ dan $I \subseteq R$. Himpunan tak kosong I adalah ideal kiri (kanan) dari R apabila memenuhi

1. $\forall a, b \in I$ berlaku $a - b \in I$.
2. $\forall r \in R$ dan $i \in I$ berlaku ri (ir) $\in I$.

Berdasarkan Definisi 2.2.10 himpunan tak kosong I dari ring R disebut ideal dari R apabila I adalah ideal kiri sekaligus I adalah ideal kanan.

Berdasarkan Definisi 2.2.10 diberikan contoh sebagai berikut.

Contoh 2.2.11

Diberikan $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ merupakan ring, dan $2\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}$. Struktur $(2\mathbb{Z}, +, \cdot)$ merupakan ideal dari $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$.

Bukti:

Ambil sebarang $2a, 2b \in 2\mathbb{Z}$. Ditunjukkan bahwa struktur $(2\mathbb{Z}, +, \cdot)$ merupakan ideal dari $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$. Perhatikan bahwa,

1. $\forall 2a, 2b \in 2\mathbb{Z}$ berlaku $2a - 2b \in 2\mathbb{Z}$.

$$2a - 2b = 2(a - b) \in 2\mathbb{Z}$$

2. $\forall x \in \mathbb{Z}$ dan $2a \in 2\mathbb{Z}$ berlaku $x \cdot 2a$ ($2a \cdot x$) $\in 2\mathbb{Z}$.

$$x \cdot 2a = 2(ax) \in 2\mathbb{Z} \text{ dan } 2a \cdot x = 2(ax) \in 2\mathbb{Z}$$

Berdasarkan uraian 1-2 dan Definisi 2.2.10 terbukti bahwa $(2\mathbb{Z}, +, \cdot)$ merupakan ideal dari $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$. ■

Lebih lanjut, diberikan contoh lain sebagai berikut.

Contoh 2.2.12

Diberikan $(M_{2 \times 2}(\mathbb{R}), +, \cdot)$ merupakan ring dan didefinisikan $M_{2 \times 2}^2(\mathbb{Z}) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}$, $M_{2 \times 2}^2(\mathbb{Z}) \subseteq M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$. Struktur $(M_{2 \times 2}^2(\mathbb{Z}), +, \cdot)$ merupakan ideal kiri tetapi bukan ideal kanan dari $(M_{2 \times 2}(\mathbb{R}), +, \cdot)$.

Bukti:

Ambil sebarang $A, B \in M_{2 \times 2}^2(\mathbb{Z})$, dengan $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} c & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix}$ serta $X \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$, dengan $X = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$.

Perhatikan bahwa,

1. $\forall A, B \in M_{2 \times 2}^2(\mathbb{Z})$ berlaku $A - B \in M_{2 \times 2}^2(\mathbb{Z})$.

$$\begin{aligned} A - B &= \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a - c & 0 \\ b - d & 0 \end{pmatrix} \in M_{2 \times 2}^2(\mathbb{Z}) \end{aligned}$$

2. $\forall X \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ dan $A \in M_{2 \times 2}^2(\mathbb{Z})$ berlaku $XA \in M_{2 \times 2}^2(\mathbb{Z})$.

$$\begin{aligned} XA &= \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} pa + qb & 0 \\ ra + sb & 0 \end{pmatrix} \in M_{2 \times 2}^2(\mathbb{Z}) \end{aligned}$$

disisi lain, $\forall X \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ dan $A \in M_{2 \times 2}^2(\mathbb{Z})$ berlaku $AX \notin M_{2 \times 2}^2(\mathbb{Z})$.

$$\begin{aligned} AX &= \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ap & aq \\ bp & bs \end{pmatrix} \notin M_{2 \times 2}^2(\mathbb{Z}) \end{aligned}$$

Berdasarkan uraian 1-2 dan Definisi 2.2.10 terbukti bahwa $(M_{2 \times 2}^2(\mathbb{Z}), +, \cdot)$ merupakan ideal kiri tetapi bukan ideal kanan dari $(M_{2 \times 2}(\mathbb{R}), +, \cdot)$. ■

Lebih lanjut, berikut akan ditunjukkan teorema terkait ideal di R .

Teorema 2.2.13 (Malik et al., 2007)

Diberikan ring $(R, +, \cdot)$, $\{0\} \subseteq R$ maka himpunan $\{0\}$ adalah ideal dari R dan selanjutnya R adalah ideal dari R .

Bukti:

Akan ditunjukkan $\{0\}$ adalah ideal dari R dan selanjutnya R adalah ideal dari R .

a. $\{0\}$ adalah ideal dari R

Ditunjukkan dahulu $\{0\}$ subring dari R . Diambil sebarang $x, y \in \{0\}$, $\forall 0 \in \{0\}$ berlaku $x + y = 0 + 0 = 0 \in \{0\}$ dan $\forall x \in \{0\}$ berlaku $-x = -0 = 0 \in \{0\}$. Jadi, $\{0\}$ subring dari R . Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa $\{0\}$ adalah ideal dari R . Ambil sebarang $r \in R$ dan $x \in \{0\}$ berlaku $r \cdot x = r \cdot 0 = 0 \in \{0\}$ dan $x \cdot r = 0 \cdot r = 0 \in \{0\}$. Dengan demikian, terbukti bahwa $\{0\}$ adalah ideal dari R .

b. R adalah ideal dari R

Ditunjukkan dahulu R subring dari R . Jelas bahwa $R \subseteq R$. Diambil sebarang $r_1, r_2 \in R$, karena R tertutup pada operasi penjumlahan dan perkalian berlaku $r_1 + r_2 \in R$ dan $r_1 \cdot r_2 \in R$. Jadi, R subring dari R . Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa R adalah ideal dari R . Ambil sebarang $r_1, r_2 \in R$ berlaku $r_1 \cdot r_2 \in R$ dan $r_2 \cdot r_1 \in R$. Dengan demikian, terbukti bahwa R adalah ideal dari R .

Berdasarkan uraian a dan b, terbukti bahwa $\{0\}$ adalah ideal dari R dan selanjutnya R adalah ideal dari R . ■

Selain ditunjukkan bahwa $\{0\}$ adalah ideal terkecil dan R adalah ideal terbesar dalam ring. Lebih lanjut, kita ingin mengetahui kapan suatu ideal dapat menjadi seluruh ring. Diberikan teoremanya sebagai berikut.

Teorema 2.2.14 (Malik et al., 2007)

Diberikan ring $(R, +, \cdot)$ adalah ring dengan elemen satuan dan I ideal di R . Jika $1 \in I$, maka $I = R$.

Bukti:

Diketahui $(R, +, \cdot)$ adalah ring dengan elemen satuan 1 dan $1 \in I$. Akan ditunjukkan $I = R$ yaitu $I \subseteq R$ dan $R \subseteq I$. Karena I ideal di R , maka $I \subseteq R$. Selanjutnya, ditunjukkan $R \subseteq I$. Ambil sebarang $r \in R$, karena $1 \in I$ maka $1 \in I$. Karena I juga ideal di R , maka $r \cdot 1 = 1 \cdot r = r \in I$. Akibatnya, $R \subseteq I$. Dengan demikian, terbukti bahwa $I = R$. ■

Selain dijelaskan struktur dasar ring yang memenuhi sifat-sifat tertentu, selanjutnya akan dijelaskan hubungan/keterkaitan antar ring melalui fungsi-fungsi yang mampu mempertahankan sifat-sifat ring dari ring yang satu ke ring yang lainnya. Fungsi tersebut disebut sebagai homomorfisma ring. Lebih lanjut, jika homomorfisma tersebut berasal dari dan menuju ring yang sama, maka fungsi tersebut disebut sebagai endomorfisma ring. Diberikan definisi homomorfisma dan endomorfisma ring sebagai berikut.

Definisi 2.2.15 (Rani et al., 2021)

Misalkan R_1 dan R_2 adalah ring, maka fungsi $f: R_1 \rightarrow R_2$ disebut sebagai homomorfisma ring apabila $\forall x, y \in R_1$ memenuhi:

1. $f(x + y) = f(x) + f(y)$
2. $f(xy) = f(x)f(y)$

Lebih lanjut, jika $R_1 = R_2$ maka fungsi f disebut sebagai endomorfisma ring.

Berdasarkan Definisi 2.2.15 diberikan contoh sebagai berikut.

Contoh 2.2.16

Diberikan $\mathbb{Z}$ adalah himpunan semua bilangan bulat dan $M_{2 \times 2}(\mathbb{Z})$ adalah himpunan semua matriks berukuran 2×2 dengan entri-entrinya adalah elemen-elemen di himpunan semua bilangan bulat, yang didefinisikan dengan

$$f: \mathbb{Z} \rightarrow M_{2 \times 2}(\mathbb{Z})$$

$$a \mapsto f(a) = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_4 \end{pmatrix}$$

Pemetaan fungsi f merupakan homomorfisma ring.

Bukti:

Ambil sebarang $a, b \in \mathbb{Z}$.

Akan ditunjukkan pemetaan fungsi f merupakan homomorfisma ring.

Perhatikan bahwa,

$$1. f(a + b) = f(a) + f(b)$$

$$\begin{aligned} f(a + b) &= f \begin{pmatrix} a_1 + b_1 & 0 \\ 0 & a_4 + b_4 \end{pmatrix} \\ &= f \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_4 \end{pmatrix} \right\} \\ &= f \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_4 \end{pmatrix} + f \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_4 \end{pmatrix} \\ &= f(a) + f(b) \end{aligned}$$

$$2. f(ab) = f(a)f(b)$$

$$\begin{aligned} f(ab) &= f \begin{pmatrix} a_1 b_1 & 0 \\ 0 & a_4 b_4 \end{pmatrix} \\ &= f \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_4 \end{pmatrix} \right\} \\ &= f \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_4 \end{pmatrix} f \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_4 \end{pmatrix} \\ &= f(a)f(b) \end{aligned}$$

Berdasarkan uraian 1-2 dan Definisi 2.2.15 terbukti bahwa pemetaan fungsi f merupakan homomorfisma ring. ■

Lebih lanjut diberikan contoh lain sebagai berikut.

Contoh 2.2.17

Diberikan $\mathbb{Z}$ adalah himpunan semua bilangan bulat, yang didefinisikan dengan

$$f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$$

$$a \mapsto f(a) = a$$

Pemetaan fungsi f merupakan endomorfisma ring.

Bukti:

Ambil sebarang $a, b \in \mathbb{Z}$.

Akan ditunjukkan pemetaan fungsi f merupakan endomorfisma ring.

Perhatikan bahwa,

$$1. f(a + b) = f(a) + f(b)$$

$$\begin{aligned} f(a + b) &= a + b \\ &= f(a) + f(b) \end{aligned}$$

$$2. f(ab) = f(a)f(b)$$

$$\begin{aligned} f(ab) &= ab \\ &= f(a)f(b) \end{aligned}$$

Berdasarkan uraian 1-2 dan Definisi 2.2.15 terbukti bahwa pemetaan fungsi f merupakan endomorfisma ring. ■

Selain memiliki fungsi homomorfisma dan endomorfisma, pada ring juga memiliki fungsi yang disebut sebagai anti-homomorfisma. Berikut diberikan definisi anti-homomorfisma pada ring sebagai berikut.

Definisi 2.2.18 (Rao & Venkataraman, 2008)

Misalkan R_1 dan R_2 adalah ring, maka fungsi $f: R_1 \rightarrow R_2$ disebut sebagai anti-homomorfisma ring apabila $\forall x, y \in R_1$ memenuhi:

1. $f(x + y) = f(y) + f(x)$
2. $f(xy) = f(y)f(x)$

Berdasarkan Definisi 2.2.18 diberikan contoh sebagai berikut.

Contoh 2.2.19

Diberikan himpunan $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ adalah himpunan semua matriks berukuran 2×2 dengan entri-entrinya adalah elemen-elemen di himpunan semua bilangan riil, yang didefinisikan dengan

$$\begin{aligned} f: M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) &\rightarrow M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} &\mapsto f \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ a_2 & a_4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Pemetaan fungsi f merupakan anti-homomorfisma ring.

Bukti:

Ambil sebarang $A, B \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ dengan $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}$.

Akan ditunjukkan pemetaan fungsi f merupakan anti-homomorfisma ring.

Perhatikan bahwa,

$$1. \quad f(A + B) = f(B) + f(A)$$

$$\begin{aligned} f(A + B) &= f\left(\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}\right) \\ &= f\left(\begin{pmatrix} a_1 + b_1 & a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 & a_4 + b_4 \end{pmatrix}\right) \\ &= \begin{pmatrix} a_1 + b_1 & a_3 + b_3 \\ a_2 + b_2 & a_4 + b_4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} b_1 + a_1 & b_3 + a_3 \\ b_2 + a_2 & b_4 + a_4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} b_1 & b_3 \\ b_2 & b_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ a_2 & a_4 \end{pmatrix} \\ &= f\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \\ &= f(B) + f(A) \end{aligned}$$

$$2. \quad f(AB) = f(B)f(A)$$

$$\begin{aligned} f(AB) &= f\left(\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}\right) \\ &= f\left(\begin{pmatrix} a_1b_1 + a_2b_3 & a_1b_2 + a_2b_4 \\ a_3b_1 + a_4b_3 & a_3b_2 + a_4b_4 \end{pmatrix}\right) \\ &= \begin{pmatrix} a_1b_1 + a_2b_3 & a_3b_1 + a_4b_3 \\ a_1b_2 + a_2b_4 & a_3b_2 + a_4b_4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} b_1a_1 + b_3a_2 & b_1a_3 + b_3a_4 \\ b_2a_1 + b_4a_2 & b_2a_3 + b_4a_4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} b_1 & b_3 \\ b_2 & b_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ a_2 & a_4 \end{pmatrix} \\ &= f\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} f\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \\ &= f(B)f(A) \end{aligned}$$

Berdasarkan uraian 1-2 dan Definisi 2.2.18 terbukti bahwa pemetaan fungsi f merupakan anti-homomorfisma ring. ■

2.3 Derivasi pada Ring

Dalam aljabar, konsep derivasi merupakan generalisasi dari turunan dalam kalkulus ke dalam struktur aljabar abstrak seperti ring dan semiring. Salah satu properti utama dari derivasi ini adalah aturan Leibniz, yang menyatakan bahwa derivasi dari hasil perkalian dua elemen dalam semiring dapat dihitung dengan cara yang menyerupai aturan turunan pada fungsi biasa.

Berikut diberikan definisi derivasi pada ring.

Definisi 2.3.1 (Ashraf et al., 2006)

Diberikan $(R, +, \cdot)$ ring. Derivasi pada R adalah pemetaan $d: R \rightarrow R$ sedemikian sehingga $\forall x, y \in R$ memenuhi:

1. $d(x + y) = d(x) + d(y)$
2. $d(xy) = d(x)y + xd(y)$

Berdasarkan Definisi 2.3.1 diberikan contoh sebagai berikut.

Contoh 2.3.2

Diberikan himpunan $M_{2 \times 2}^3(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{Z} \right\}$ adalah himpunan semua matriks berukuran 2×2 dengan entri-entrinya adalah elemen-elemen di himpunan semua bilangan bulat, yang didefinisikan

$$d: M_{2 \times 2}^3(\mathbb{Z}) \rightarrow M_{2 \times 2}^3(\mathbb{Z})$$

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \mapsto d \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}$$

Pemetaan d adalah derivasi.

Bukti:

Ambil sebarang $A, B \in M_{2 \times 2}^3(\mathbb{Z})$, dengan $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} p & 0 \\ q & r \end{pmatrix}$.

Ditunjukkan bahwa pemetaan d adalah derivasi.

Perhatikan bahwa,

$$1. \quad d(A + B) = d(A) + d(B)$$

$$\begin{aligned}
 d(A + B) &= d\left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p & 0 \\ q & r \end{pmatrix}\right\} \\
 &= d\begin{pmatrix} a+p & 0 \\ b+q & c+r \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b+q & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ q & 0 \end{pmatrix} \\
 &= d\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} p & 0 \\ q & r \end{pmatrix} \\
 &= d(A) + d(B)
 \end{aligned}$$

$$2. \quad d(AB) = d(A)B + Ad(B)$$

$$\begin{aligned}
 d(AB) &= d\left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & 0 \\ q & r \end{pmatrix}\right\} \\
 &= d\begin{pmatrix} ap & 0 \\ bp+cq & cr \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ bp+cq & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ bp & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ cq & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & 0 \\ q & r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ q & 0 \end{pmatrix} \\
 &= d\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & 0 \\ q & r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} d\begin{pmatrix} p & 0 \\ q & r \end{pmatrix} \\
 &= d(A)B + Ad(B)
 \end{aligned}$$

Berdasarkan 1-2 dan Definisi 2.3.1 terbukti bahwa pemetaan d adalah derivasi. ■

BAB V

PENUTUP

Berdasarkan hasil dan pembahasan pada bab sebelumnya, diperoleh kesimpulan dan saran sebagai berikut.

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan penelitian yang telah dilakukan, diperoleh beberapa kesimpulan yang dapat diambil, yaitu:

1. Adapun contoh dari $(\alpha, 1)$ -derivasi, yaitu

$$\text{a) Diberikan himpunan } M_{3 \times 3}^7(\mathbb{Z}_0^+) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \\ d & e & f \end{pmatrix} \mid a, b, c, d, e, f \in \mathbb{Z}_0^+ \right\}$$

adalah semiring, yang didefinisikan

$$d: M_{3 \times 3}^7(\mathbb{Z}_0^+) \rightarrow M_{3 \times 3}^7(\mathbb{Z}_0^+)$$

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \\ d & e & f \end{pmatrix} \mapsto d \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \\ d & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 \\ d & e & 0 \end{pmatrix}$$

dan

$$\alpha: M_{3 \times 3}^7(\mathbb{Z}_0^+) \rightarrow M_{3 \times 3}^7(\mathbb{Z}_0^+)$$

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \\ d & e & f \end{pmatrix} \mapsto \alpha \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \\ d & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$$

Pemetaan α adalah endomorfisma dan d adalah derivasi dua arah.

$$\text{b) Diberikan himpunan } M_{3 \times 3}^7(\mathbb{Z}_0^+) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \\ d & e & f \end{pmatrix} \mid a, b, c, d, e, f \in \mathbb{Z}_0^+ \right\}$$

adalah semiring, yang didefinisikan

$$d: M_{3 \times 3}^7(\mathbb{Z}_0^+) \rightarrow M_{3 \times 3}^7(\mathbb{Z}_0^+)$$

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \\ d & e & f \end{pmatrix} \mapsto d \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \\ d & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ d & e & 0 \end{pmatrix}$$

dan

$$\alpha: M_{3 \times 3}^7(\mathbb{Z}_0^+) \rightarrow M_{3 \times 3}^7(\mathbb{Z}_0^+)$$

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \\ d & e & f \end{pmatrix} \mapsto \alpha \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \\ d & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$$

Pemetaan α adalah endomorfisma dan d adalah $(\alpha, 1)$ -derivasi tetapi bukan $(1, \alpha)$ -derivasi.

c) Diberikan himpunan $M_{3 \times 3}^7(\mathbb{Z}_0^+) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \\ d & e & f \end{pmatrix} \mid a, b, c, d, e, f \in \mathbb{Z}_0^+ \right\}$

adalah semiring, yang didefinisikan

$$d: M_{3 \times 3}^7(\mathbb{Z}_0^+) \rightarrow M_{3 \times 3}^7(\mathbb{Z}_0^+)$$

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \\ d & e & f \end{pmatrix} \mapsto d \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \\ d & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dan

$$\alpha: M_{3 \times 3}^7(\mathbb{Z}_0^+) \rightarrow M_{3 \times 3}^7(\mathbb{Z}_0^+)$$

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \\ d & e & f \end{pmatrix} \mapsto \alpha \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \\ d & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$$

Pemetaan α adalah endomorfisma dan d adalah $(1, \alpha)$ -derivasi tetapi bukan $(\alpha, 1)$ -derivasi.

2. Adapun hubungan semiring S , semiring prima S , dan semiring S dengan hukum kanselasi terhadap $(\alpha, 1)$ -derivasi, yaitu

- Diberikan $(S, +, \cdot)$ semiring dan I adalah ideal tak nol di S . Misalkan d adalah $(\alpha, 1)$ -derivasi tak nol di S . Jika $\forall x, y \in I$ berlaku $d(x + y - x - y) = 0$ maka $\forall x, y, z \in I$ berlaku $\alpha(x + y - x - y)d(z) = 0$.
- Diberikan $(S, +, \cdot)$ adalah semiring prima dan I adalah ideal tak nol di S . Misalkan d adalah $(\alpha, 1)$ -derivasi tak nol di S . Jika $x \in S$ dan $d(I)x = 0$, maka $x = 0$.
- Diberikan S adalah semiring dengan sifat kanselasi terhadap operasi penjumlahan dan I adalah subsemigrup terhadap operasi perkalian di S . Diberikan d adalah $(\alpha, 1)$ -derivasi di S dan $\alpha(I) = I$.

- Jika d adalah homomorfisma di I , maka $\forall x, y \in I$ berlaku $d(x)y d(x) = d(x)yx = \alpha(x)y d(x)$.
- Jika d adalah anti-homomorfisma di I , maka $\forall x, y \in I$ berlaku $d(x)y d(x) = d(x)xy = y\alpha(x)d(x)$.

5.2 Saran

Pada penelitian ini telah dijelaskan konstruksi $(\alpha, 1)$ -derivasi pada semiring. Penelitian selanjutnya, dapat dilanjutkan dengan mencari konstruksi $(\alpha, 1)$ -derivasi pada modul atas ring dan konstruksi $(\alpha, 1)$ -derivasi pada semimodul atas semiring.

DAFTAR PUSTAKA

- Alwi, W. (2021). *Struktur Aljabar - Teori Ring* (E. Santoso, Ed.). Perkumpulan Rumah Cemerlang Indonesia (PRCI). www.rcipress.rcipublisher.org
- Ashraf, M., Ali, S., & Haetinger, C. (2006). On Derivations in Rings and Their Applications. *The Aligarh Bulletin of Mathematics*, 25(2), 80–107. <http://ensino.univates.br/~chaet>
- Chaudhry, M. A., & Thaheem, A. B. (2003). On (α, β) -Derivations of Semiprime Rings. *Demonstratio Mathematica*, XXXVI(2). <https://doi.org/10.1515/dema-2003-0204>
- Devi, S. P. N., & Chandramouleeswaran, M. (2014). $(\alpha, 1)$ -Derivations on Semirings. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 92(4), 525–534. <https://doi.org/10.12732/ijpam.v92i4.7>
- Dummit, D. S., & Foote, R. M. (2004). *Abstract Algebra* (Third Edition). John Wiley and Sons, Inc.
- Fraleigh, J. B. (2003). *A First Course in Abstract Algebra* (7th ed.). United States: Addison-Wesley.
- Golan, J. S. (1999). *Semirings and Their Applications*. Springer Netherlands. <https://doi.org/10.1007/978-94-015-9333-5>
- Hardiansyah, R. R., Wardati, K., & Riyanto, M. Z. (2017). Maximal Homomorphism in Fundamental Theorem of Homomorphism Semiring. *Proc. Internat. Conf. Sci. Engin.*, 1, 189–192.
- Haseena, Sk., & Reddy, C. J. S. (2021). $(\alpha, 1)$ -Reverse Derivations on Prime Near-Rings. *International Journal of Algebra*, 15(4), 165–170. <https://doi.org/10.12988/ija.2021.91561>
- Hvala, B. (1998). Generalized Derivations in Rings. *Communications in Algebra*, 26(4), 1147–1166. <https://doi.org/10.1080/00927879808826190>
- Lisapaly, S. R., & Persulesy, E. R. (2011). Semiring. *Jurnal Barekeng*, 5(2), 45–47.
- Malik, D. S., Mordeson, J. N., & Sen, M. K. (2007). *MTH 581-582 Introduction to Abstract Algebra*.
- Posner, E. C. (1957). Derivations in Prime Rings. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 8, 1093–1100. <https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1957-0095863-0>
- Prihandoko, A. C. (2016). *Pengantar pada Teori Grup dan Ring*. Universitas Jember. <https://adoc.pub/pengantar-pada-teori-grup-dan-ring.html>

- Rani, R., Malik, A. K., & Ahmad, A. (2021). Ring Homomorphism and The Isomorphism Theorems. *Vidyabharati International Interdisciplinary Research Journal*, 13(1). www.viirj.org
- Rao, K. C., & Venkataraman, S. (2008). Anti-Homomorphisms in Near-Rings. *Jour. of Inst. of Maths. & Comp. Sciences*, 21, 83–88. <https://www.researchgate.net/publication/267430650>
- Romsery, M. M., Patty, H. W. M., & Talakua, M. W. (2015). Identifikasi Basis Grobner dalam Ideal Ring Polinomial. *Jurnal Ilmu Matematika Dan Terapan*, 9(1), 11–20.
- Setyawati, D. W. (2017). Teori Ideal pada Semiring Faktor dan Semiring Ternary Faktor. *Journal of Mathematics and Its Applications*, 14(1), 17–23.
- Tahmir, S. (2004). *Teori grup*. Makassar: Andira Publisher.
- Yasodara, B., & Sathappan, K. E. (2015). Homomorphism and Anti-Homomorphism of Bipolar-Valued Multi Fuzzy Subsemirings of a Semiring. *Bulletin of Mathematics and Statistics Research*, 3, 229–233. <http://www.bomsr.com>