SKRIPSI

FUNGSI QUASIKONVEKS DAN FUNGSI QUASIKONKAF

LUSTI DAMAYANTI J
E0120002

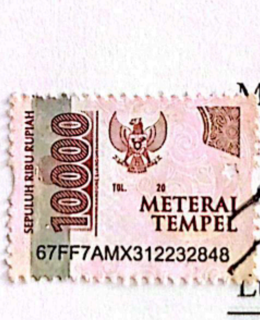
PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS SULAWESI BARAT
2025

SURAT PERNYATAAN

Yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama	: Lusti Damayanti J
Tempat/tgl.Lahir	: Lakkading/12 Juni 2003
NIM	: E0120002
Program Studi	: Matematika

Menyatakan bahwa tugas akhir dengan judul ***"Fungsi Quasikonveks dan Fungsi Quasikonkaf"*** disusun berdasarkan prosedur ilmiah yang telah melalui pembimbingan dan bukan merupakan plagiat dari karya ilmiah/naskah yang lain. Apabila dikemudian hari terbukti bahwa pernyataan ini benar, maka saya bersediah menerima sanksi sesuai peraturan yang berlaku.



Majene

Lusti Damayanti J

Nim : E0120002

HALAMAN PENGESAHAN

Skripsi ini diajukan oleh:

Nama : Lusti Damayanti J

NIM : E0120002

Judul : Fungsi Quasikonveks dan Fungsi Quasikonkaf

Telah berhasil di pertanggung jawabkan di hadapan Tim Penguji (SK Nomor 02/UN55.7/HK.04/2025, tanggal 24 Januari 2025) dan diterima sebagai bagian persyaratan memperoleh gelar Sarjana S1 Matematika pada Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Sulawesi Barat.

Disahkan oleh:

Dekan FMIPA
Universitas Sulawesi Barat

MUSAFIRA, S.Si., M.Sc.
NIP. 197709112006042002

Tim Penguji:

Ketua Penguji : Musafira, S.Si., M.Sc (................................)

Sekretaris :Fardinah, S.Si., M.Sc (................................)

Pembimbing 1 : Ahmad Ansar, S.Pd., M.Sc (................................)

Pembimbing 2 : Muh.Rifandi, S.Si., M.Si (................................)

Penguji 1 : Fardinah, S.Si., M.Sc (................................)

Penguji 2 : Hirman Rahman, S.Si., M.Si (................................)

Penguji 3 : Darma Ekawati, S.Pd., M.Si (................................)

ABSTRAK

Pada penelitian ini membahas mengenai fungsi quasikonveks dan quaiskonkaf. Fungsi konveks merupakan salah satu fungsi penting dalam bidang matematika karena memiliki banyak aplikasi dalam bidang ekonomi,dan optimasi sedangkan fungsi konkaf merupakan kebalikan dari fungsi konveks. Tujuan dari penelitian ini adalah untuk mengetahui bagaimana karakteristik dan sifat-sifat dari fungsi quasikonveks dan quaiskonkaf. Metode yang digunakan dalam penelitian ini yaitu metode studi literatur yang mempelajari bagaimana fungsi quasikonveks dan quaiskonkaf. Hasil penelitian ini menunjukan bahwa fungsi quasikonveks dan quasikonkaf saling berhubungan erat, seperti yang dijelaskan dalam menunjukkan bahwa fungsi quasikonveks juga quasikonkaf, dan sebaliknya, fungsi konkaf menjadi quasikonkaf jika himpunannya konveks.Sifat-sifat lainnya menunjukkan bahwa penjumlahan dua fungsi quasikonveks belum tentu menghasilkan fungsi quasikonveks,dan fungsi monoton menjadi quasikonveks dan quasikonkaf.

Kata kunci : ***quasikonveks, quasikonkaf, fungsi***

Abstract

This research discusses quasiconvex and quaisconvex functions. Convex function is one of the important functions in the field of mathematics because it has many applications in economics, and optimization while the concave function is the opposite of the convex function. The purpose of this research is to find out how the characteristics and properties of quasiconvex and quaisconvex functions. The method used in this research is a literature study method that studies how quasiconvex and quaisconvex functions. The results of this study show that quasiconvex and quasiconcave functions are closely related, as explained in showing that quasiconvex functions are also quasiconcave, and vice versa, a convex function becomes quasiconcave if the set is convex.Other properties show that the sum of two quasiconvex functions does not necessarily produce a quasiconvex function, and monotone functions become quasiconvex and quasiconcave.

Keywords: quasiconvex, quasiconcave, function

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Fungsi konveks merupakan salah satu fungsi penting dalam bidang matematika karena memiliki banyak aplikasi dalam bidang ekonomi, optimasi dan ekonomi keputusan. Pada grafik fungsi tersebut, garis lurus yang menghubungkan kedua titik tersebut berada di atas atau pada grafik fungsi tersebut. Kebalikan dari fungsi konveks disebut dengan fungsi konkaf.

Salah satu sifat penting dari fungsi konveks adalah setiap minimum lokal juga merupakan minimum global. Oleh karena itu, fungsi ini sangat berguna dalam bidang optimisasi dalam kaitannya meminimumkan fungsi tujuan. Hal ini mempermudah analisis dan pencarian solusi, terutama dalam konteks optimasi konveks yang muncul dalam berbagai disiplin imu seperti seperti ekonomi, keuangan, dan teknik. Selain itu, fungsi konveks juga memastikan bahwa solusi dari suatu masalah dapat dicari secara efisien, baik secara *gradient descent* atau metode pemrograman linier.

Keunggulan dari fungsi quasikonveks ini membuatnya ideal untuk mengatasi masalah optimisasi dan pemodelan preferensi yang tidak dapat ditangani dengan fungsi konveks biasa. Fungsi quasikonveks mempertahankan sifat yang lebih stabil terhadap transformasi monoton, yang penting dalam berbagai konteks seperti analisis utilitas ordinal dan pengambilan keputusan. Sebagai contoh, dalam teori utilitas dan preferensi, transformasi monoton dari fungsi utilitas tidak mengubah urutan preferensi individu, tetapi dapat mengubah sifat konveksitasnya. Di sini, sifat quasikonveks memberikan jaminan bahwa meskipun transformasi monoton diterapkan, urutan preferensi tetap dipertahankan, dan solusi optimasi dapat dianalisis dengan cara yang serupa.

Di sisi lain, meskipun fungsi quasikonveks menawarkan fleksibilitas yang lebih tinggi dibandingkan fungsi konveks, pengembangan alat-alat analitis untuk memverifikasi quasikonveksitas serta penerapan konsep ini dalam konteks optimisasi masih menjadi tantangan. Tidak seperti fungsi konveks yang memiliki teori yang lebih matang dan metode optimasi yang lebih terstruktur, analisis fungsi quasikonveks sering kali memerlukan pendekatan yang lebih kompleks, terutama ketika menghadapi masalah-masalah dengan banyak variabel atau kondisi pembatas yang tidak linear.

Dalam bidang ekonomi, misalnya, penggunaan fungsi utilitas quasikonveks memungkinkan pemodelan preferensi konsumen yang lebih realistis, terutama dalam situasi dimana preferensi konsumen tidak bersifat linier dan kompleksitas dari kurva indiferen tidak dapat diabaikan. Di bidang teknik, fungsi biaya quasikonveks sering digunakan untuk merepresentasikan biaya yang berfluktuasi atau fungsi efisiensi yang tidak monoton. Oleh karena itu, penelitian lebih lanjut mengenai sifat-sifat dari fungsi quasikonveks serta pengembangan teknik optimisasi yang efisien untuk fungsi-fungsi ini sangat diperlukan.

Beberapa penelitian yang telah dilakukan oleh ilmuwan seperti Krasnosel'skii M.A. dan Rutitskii Y.B. (1961) telah mengkaji tentang kegunaan dari fungsi konveks. Seperti halnya meneliti tentang ruang Orlicz, yang merupakan salah satu perluasan dari ruang lebesgue. Kemudian Roberts A.W. dan Verberg D.E. (1973) telah membuktikan beberapa sifat yang ekuivalen dengan definisi fungsi konveks yang biasa dikenal. Beberapa hasil yang mereka peroleh bahwa fungsi konveks dan fungsi midkonveks ekuivalen. Roberts A.W. dan Verberg D.E. (1973) juga membahas fungsi konveks pada ruang bernorm, optimasi, fungsi quasikonveks, dan memberikan analogy fungsi konveks dengan fungsi quasikonkaf. Dalam skripsinya telah membahas sifat-sifat fungsi konveks yang tidak digeneralisasi menjadi sifat-sifat fungsi quasikonveks. (Juada Adryana, 2020)

Pada tahun 1970, Hervey J. Greenberg dan William P. Pierskalla menulis sebuah jurnal yang berjudul "A Review Of Quasi-Convex Functions". Jurnal ini merangkum hasil dari banyak peneliti sebelumnya dan memberi perbaikan untuk mendapatkan kesimpulan umum yang lebih jauh. Tujuan tambahan dari jurnal ini adalah menyajikan kejelasan struktur yang mendasari fungsi quasikonveks dengan menghadirkan sifat yang memiliki kemiripan dengan fungsi konveks dan dengan menggambarkan bahwa fungsi quasikonveks juga memiliki sifat yang tidak memiliki kemiripan dengan fungsi konveks. (Matika, E. 2015)

Berdasarkan dari latar belakang tersebut maka peneliti tertarik untuk meneliti tentang dua fungsi tersebut dengan judul “Fungsi Quasikonveks dan Fungsi Quasikonkaf”.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian pada latar belakang masalah di atas, rumusan masalah yang akan dikaji dalam penelitian ini adalah sebagi berikut:

1. Bagaimana karakteristik fungsi quasikonveks dan fungsi quasikonkaf?
2. Bagaimana turunan fungsi quasikonveks dan fungsi quasikonkaf ?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdsarkan rumusan masalah tersebut maka secara khusus tujuan penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Untuk memahami karakteristik dari fungsi quasikonveks dan fungsi quasikonkaf
2. Untuk memahami turunan fungsi quasikonveks dan fungsi quasikonkaf.

1.4 Manfaat penelitian

Manfaat penelitian ini sebagai berikut:

1. Dapat mengetahui lebih dalam mengenai fungsi konveks, fungsi quasikonveks dan fungsi quasikonkaf, dan bentuk aplikasinya.
2. Penelitian ini dapat membantu dalam pengembangan model matematis yang lebih realistis dan akurat untuk menjelaskan fenomena dalam berbagai disiplin ilmu.
3. Dalam bidang teknik, pemahaman tentang fungsi quasikonveks dan fungsi quasikonkaf dapat memperkarya analisis matematis, membuka jalan bagi penemuan konsep-konsep baru dan pengembangan metode-metode analisis.

4. Hasil penelitian ini dapat diterapkan dalam pengembangan kurikulum matematika yang lebih konteksual dan memperkarya materi pengajaran pada tingkat pendidikan yang berbeda.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

Pada bagian ini akan dijelaskan mengenai beberapa sifat terkait fungsi konveks dan fungsi konkaf yang dijadikan landasan dalam pembahasan terkait fungsi quasikonveks dan fungsi quasikonkaf.

2.1 Fungsi Kontinu

Definisi 2.1 (Jiri Lebl, 2021)

Misalkan $S \subset \mathbb{R}, c \in S$, dan $f : \mathrm{S} \to \mathbb{R}$ adalah suatu fungsi, jika mengatakan bahwa f kontinu di titik c jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga untuk setiap $x \in S$ dan $|x - c| < \delta$, maka $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$, jika $f : \mathrm{S} \to \mathbb{R}$ kontinu untuk semua $c \in S$, maka cukup mengatakan bahwa f adalah fungsi kontinu.

Untuk $|x - c| < \delta$, grafik dari $f(x)$ harus berada didalam wilayah abu-abu. Jika f kontinu untuk semua $c \in A$, dikatakan bahwa f kontinu pada $A \subset S$. Kontinuitas mungkin adalah definisi paling penting untuk dipahami dalam analisis, dan bukan definisi yang mudah, perlu dicatat bahwa δ tidak hanya bergantung pada ε, tetapi juga pada c.

Definisi 2.2 (Jiri Lebl, 2021)

Misalkan $S \subset \mathbb{R}, f : S \to \mathbb{R}$ adalah suatu fungsi, dan $c \in S$ adalah suatu titik, maka:

i). jika c bukan titik akumulasi dari S, maka f kontinu di c

ii). Jika c adalah titik dari akumulasi dari S, maka f kontinu di c jika dan hanya jika limit dari $f(x)$ saat $x \to c$ ada dan $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$

iii). f kontinu di c jika dan hanya jika untuk setiap barisan $\{x_n\}$ dengan $x_n \in S$ dan $\lim x_n = c$,maka barisan $\{f(x_n)\}$ konvergen ke $f(c)$.

Bukti :

(I) misalkan c bukan merupakan titik akumulasi dari S, maka terdapat $\delta > 0$ sehingga $S \cap (c-\delta, c+\delta) = (c)$. Oleh karena itu, untuk setiap $\varepsilon > 0$, cukup pilih δ yang telah disebutkan. Satu-satunya $x \in S$ yang memenuhi $|x-c| < \delta$ adalah $x = c$ maka $|f(x) - f(c)| = |f(\text{c}) - f(c)| = 0 < \varepsilon$

(II) misalkan c adalah titik akumulasi dari S , pertama, misalkan $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$, maka untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga jika $x \in S \setminus \{c\} \subset S$ $x \in S \setminus \{c\}$ dan $|x-c| < \delta$,maka $|f(\text{x}) - f(c)| < \varepsilon$, juga $|f(c) - f(c)| = 0 < \varepsilon$, sehingga definisi kekontinuan di c terpenuhi. Sebaliknya, misalkan f kontinu di c, untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga untuk $x \in S$ dengan $|x-c| < \delta$ diperoleh . $|f(\text{x}) - f(c)| < \varepsilon$ $|f(\text{x}) - f(c)| < \varepsilon$. Maka, pernyataan tersebut tetap benar jika $x \in S \setminus \{c\} \subset S$ oleh karena itu $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$.

(III) misalkan f kontinu di c, misalkan $\{x_n\}$ adalah barisan dengan $x_n \in S$ dan $\lim x_n = c$. Misalkan diberikan $\varepsilon > 0$,temukan $\delta > 0$ sedemikian sehingga $|f(\text{x}) - f(c)| < \varepsilon$ untuk semua $x \in S$ dengan $|x-c| < \delta$ temukan $M \in N$ sedemikian sehingga untuk $n \geq M, |x_n - c| < \delta$, maka untuk $n \geq M$,diperoleh $|f(\text{x}_n) - f(c)| < \varepsilon$ sehingga $f(x_n) \to f(c)$.

Contoh 2.2

Diberikan $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ didefinisikan oleh $f(x) := \dfrac{1}{x}$ adalah fungsi kontinu.

Bukti:

Tetapkan $c \in (0, \infty)$, misalkan $\{x_n\}$ adalah barisan dalam $(0, \infty)$ dengan $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = c$ maka:

$$f(c) = \frac{1}{c} = \frac{1}{\lim\limits_{n \to \infty} x_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{x_n} = \lim_{n \to \infty} f(x_n)$$

dengan demikian, f kontinu di c, karena f kontinu di setiap $c \in (0,\infty)$ maka f kontinu.

Definisi 2.3 (Jiri Lebl, 2021)

Misalkan $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ adalah suatu polynomial, artinya

$f(x) = a_d x^d + a_d x^{d-1} + ... + a_1 x + a_0$, untuk beberapa konstanta $a_0, a_1, ..., a_d$ maka f adalah kontinu.

Bukti :

$$\begin{aligned} f(c) &= a_d x^d + a_d x^{d-1} + ... + a_1 x + a_0 \\ &= a_d (\lim x_n)^d + a_{d-1} (\lim x_n)^{d-1} + ... + a_1 (\lim x_n) + a_0 \\ &= \lim_{n \to \infty} f(x_n) \end{aligned}$$

Dengan demikian f kontinu di c karena f kontinu di setiap $c \in \mathbb{R}$ maka f kontinu.

Definisi 2.4 (Jiri Lebl, 2021)

Misalkan $f:S \to \mathbb{R}$ dan $g:S \to \mathbb{R}$ adalah fungsi yang kontinu di $c \in S$

i). Fungsi $h:S \to \mathbb{R}$ yang didefinisikan oleh $h(x) := f(x) + g(x)$ adalah kontinu di c

ii). Fungsi $h:S \to \mathbb{R}$ yang didefinisikan oleh $h(x) := f(x) - g(x)$ adalah kontinu di c

iii). Fungsi $h:S \to \mathbb{R}$ yang didefinisikan oleh $h(x) := f(x)\mathrm{g}(x)$ adalah kontinu di c

iv). Jika $g(x) \neq 0$ untuk semua $x \in S$ maka fungsi $h:S \to \mathbb{R}$ yang didefinisikan oleh $h(x) := \dfrac{f(x)}{g(x)}$ adalah kontinu di c

Contoh 2.4

Fungsi $h(x) := f(x) + g(x)$ adalah kontinu di c jika f dan g kontinu di c

Bukti:

Misalkan $f(x) = \sin(x)$ dan $g(x) = \cos(x)$

Didefinisikan:

$$h(x) = f(x) + g(x) = sin(x) + \cos(x)$$

Karena $f(x)$ dan $g(x)$ kontinu di setiap $c \in \mathbb{R}$, maka:

$$h(x) = \sin(x) + \cos(x)$$

Juga kontinu di setiap $c \in \mathbb{R}$.

2.2 Limit dan Kekontinuan

Pada bagian ini dibahas mengenai definisi dan sifat-sifat dari limit dan kekontinuan fungsi real.

Definisi 2.5 (Bartle dan Sherbet, 2010)

Diberikan himpunan $A \subseteq \mathbb{R}$, titik $c \in \mathbb{R}$ adalah titik kluser dari A dan fungsi $f: A \to \mathbb{R}$. Bilangan $L \in \mathbb{R}$ disebut titik limit fungsi f di c apabila untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sehingga untuk setiap $x \in A$, jika $0 < |x - c| < \delta$, maka berlaku

$$|f(x) - f(c)| < \varepsilon$$

Jika L adalah titik limit f di c , maka f dikatakan konvergen ke L di c dan ditulis $\lim_{x \to c} f(x) = L$.

Contoh 2.5

Diberikan fungsi $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dengan $f(x) = x^2$. Tunjukkan bahwa $\lim_{x \to 2} x^2 = 4$

Bukti:

Diambil sebarang $\varepsilon > 0$. Pilih $\delta = inf\left\{1, \frac{\varepsilon}{5}\right\}$. Perhatikan bahwa untuk setiap $x \in \mathbb{R}$, jika $0 < |x - 2| < \delta$, maka untuk $\delta = 1$, diperoleh $|x - 2| < 1$ atau $|x| < 2 + 1 = 3$. Akibatnya,

$$|x + 2| \leq |x| + |2| < 3 + 2 = 5$$

Perhatikan bahwa untuk setiap $x \in \mathbb{R}$ berlaku

$$\begin{aligned} |f(x) - L| &= |x^2 - 4| \\ &= |x + 2||x - 2| \\ &< 5\delta \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

Jadi, $\lim_{x \to 2} x^2 = 4$

Teorema 2.6

Jika fungsi $f: A \to \mathbb{R}$ dan c adalah titik kluster dari A , maka pernyataan berikut ekuivalen

(1) $\lim_{x \to c} f(x) = L$

(2) Untuk setiap barisan (x_n) elemen A yang konvergen ke c,$x_n \neq c$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, maka barisan $(f(x_n))$ konvergen ke L

Bukti:

$(1) \to (2)$ Diambil sebarang $\varepsilon > 0$. Karena $\lim_{x \to c} f(x) = L$, maka terdapat $\delta > 0$ sehingga jika $0 < |x - c| < \delta$ berlaku $|f(x) - L| < \varepsilon$. Misalkan $\lim(x_n) = c, x_n \neq c$. berdasarkan definisi limit barisan, untuk $\delta > 0$ sebelumnya terdapat $K \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $n \geq K$ berlaku $|x_n - c| < \delta$. Karena $x_n \neq c$ maka dapat ditulis $0 < |x_n - c| < \delta$. Akibatnya, untuk $\varepsilon > 0$ di atas maka untuk setiap $n \geq K$ berlaku $|f(x_n) - L| < \varepsilon$. Dengan kata lain, barisan $(f(x_n))$ konvergen ke L.

$(2) \to (1)$ Dibuktikan dengan kontradiksi. Andaikan bahwa $\lim_{x \to c} f(x) \neq L$, berarti terdapat $\varepsilon_0 > 0$ sehingga untuk setiap $\delta > 0$ terdapat $x_\delta \in A$ sehingga $0 < |x_\delta - c| < \delta$, tetapi $|f(x_\delta) - f(c)| \geq \varepsilon_o$. Perhatikan bahwa jika $\delta := \frac{1}{n} > 0$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ maka terbentuk barisan (x_n) dengan sifat $0 < |x_n - c| < \frac{1}{n}, x_n \in A$ tetapi $|f(x_n) - L| \geq \varepsilon_0$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Ini berarti barisan $(f(x_n))$ tidak konvergen ke L atau kontradiksi dengan yang diketahui. Jadi, $\lim_{x \to c} f(c) = L$. ■

Teorema 2.7

Misalkan c adalah titik limit dari $A \subseteq \mathbb{R}$ dan $f: A \to \mathbb{R}$ .Buktikan bahwa $\lim_{x\to c} f(c) = L$ jika dan hanya jika $\lim_{x\to c} \left| f(x) - L \right| = 0$

Bukti:

$\Rightarrow$ Asumsikan bahwa $\lim_{x\to c} f(c) = L$

Diberikan sebarang $\varepsilon > 0$, maka terdapat $\delta > 0$

Semikian sehingga untuk $x \in A$ dengan $0 < \left| x - c \right| < \delta$ berlaku $\left| f(x) - L \right| < \varepsilon$

Perhatikan bahwa

$$\left| \left| f(x) - L \right| - 0 \right| = \left| f(x) - L \right| < \varepsilon$$

Oleh karena itu, berdasarkan definisi limit fungsi diperoleh bahwa $\lim_{x\to c} \left| f(x) - L \right| = 0$

$\Leftarrow$ Asumsikan bahwa $\lim_{x\to c} \left| f(x) - L \right| = 0$

Diberikan sebarang $\varepsilon > 0$, maka terdapat $\delta > 0$

Semikian sehingga untuk $x \in A$ dengan $0 < \left| x - c \right| < \delta$ berlaku $\left| f(x) - L \right| < \varepsilon$

Perhatikan bahwa

$$\left| f(c) - L \right| = \left| f(x) - L \right| < \varepsilon$$

Oleh karena itu, berdasarkan definisi limit fungsi diperoleh bahwa

$$\lim_{x\to c} f(c) = L$$

Contoh 2.7

Misalkan I interval di $\mathbb{R}$, $f: I \to \mathbb{R}$ dan $c \in I$. Asumsikan bahwa ada konstanta K dan L sedemikian sehingga $|f(x) - L| \leq K|x - c|$ untuk semua $x \in I$. Tunjukkan bahwa $\lim_{x \to c} f(x) = L$

Bukti:

Diberikan sebarang $\varepsilon > 0$

$$\delta = \frac{\varepsilon}{1+k}$$

Maka, untuk $x \in I$dan $0 < |x - c| < \delta$ berlaku

$$\begin{aligned} |f(x) - L| &\leq K|x - c| \\ &< K\delta \\ &= K\frac{1}{1+K}\varepsilon \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

Oleh karena itu , berdasarkan definisi limit fungsi diperoleh $\lim_{x \to c} f(x) = L$

Definisi 2.8 (Bartle dan Sherbet, 1994)

Diberikan himpunan $A \subseteq \mathbb{R}$, fungsi $f: A \to \mathbb{R}$ dan $c \in A$. fungsi f dikatakan kontinu di c apabila setiap $\epsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sehingga $x \in A$ yang memenuhi $|x - c| < \delta$, maka $|f(x) - f(c) < \varepsilon|$

Teorema 2.8

Diberikan $A \subseteq \mathbb{R}$,$c \in A$, dan $f: A \to \mathbb{R}$. Fungsi f dikatakan kontinu di c jika dan hanya jika untuk setiap barisan $(x_n) \subseteq A$ yang konvergen ke c berakibat barisan $(f(x_n))$ konvergen ke $f(c)$

Bukti:

Ambil sebarang bilangan $\epsilon > 0$.

Karena f kontinu di c maka terdapat $\delta > 0$ untuk setiap $x \in A$ dengan $|x - c| < \delta$ berlaku $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$

Perhatikan bahwa $\{x_n\}$ konvergen ke c berarti terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ dengan sifat , untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, dengan $n \geq n_0$ berlaku $|x_n - c| < \delta$

Akibatnya untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, dengan $n \geq n_0$ berlaku

$$\left|f\left(x_n\right) - f(c)\right| < \epsilon$$

Dengan kata lain bahwa $(f(x_n))$ konvergen ke $f(c)$

Contoh 2.8

Misal $K > 0$ dan misalkan $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ memenuhi kondisi $|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$ untuk semua $x, y \in \mathbb{R}$. Tunjukkan bahwa f kontinu di setiap titik $c \in \mathbb{R}$.

Bukti:

Diberikan sebarang titik $c \in \mathbb{R}$dan $\varepsilon > 0$

$$\delta = \frac{\varepsilon}{1 + K}.$$

Maka, untuk $x \in \mathbb{R}$ dengan $|x - c| < \delta$berlaku bahwa

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq K|x - y| \\ &< K\delta \\ &= K\frac{1}{1 + K} < \varepsilon \end{aligned}$$

Berarti , terbukti bahwa f kontinu di setiap titik c di $\mathbb{R}$

2.3 Turunan Fungsi Real

Pengertian Turunan Fungsi $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ di titik $c \in [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ dapat dijelaskan dalam definisi berikut.

Definisi 2.10 (Bartle dan Sherbet, 1994)

Diberikan interval terbuka $I \subseteq \mathbb{R}$, fungsi $f: I \to \mathbb{R}$ dan $c \in I$. Bilangan $L \in \mathbb{R}$ disebut turunan f di c apabila untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sehingga untuk setiap $x \in I$ jika $0 < |x - c| < \delta$, maka

$$\left|\frac{f(x) - f(c)}{x - c} - L\right| < \varepsilon$$

Dalam hal ini, fungsi *f* mempunyai turunan di *c* dan ditulis $f'(c) = L$.

Turunan fungsi *f* di *c* dapat ditulis sebagai

$$f'(x) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

Asalkan ada limitnya.

Jika $c \in int(I)$, maka $c + h \in I$ untuk setiap $h \to 0$. Jika $x = c + h, h \neq 0$, maka turunan fungsi f di *c* dapat dituliskan

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c + h) - f(c)}{h}$$

Asalkan ada limitnya

Contoh 2.10

Tunjukkan bahwa fungsi $f(x) = 3x^2$ mempunyai turunan di setiap $c \in \mathbb{R}$.

Bukti:

Ambil sebarang $c \in \mathbb{R}$

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} &= \lim_{x \to c} \frac{3x^2 - 3c^2}{x - c} \\
&= 3\lim_{x \to c} \frac{x^2 - c^2}{x - c} \\
&= 3\lim_{x \to c} \frac{(x - c)(x + c)}{x - c} \\
&= 3\lim_{x \to c} (x + c) \\
&= 3.2c \\
&= 6c
\end{aligned}$$

Jadi fungsi $f(x) = 3x^2$ mempunyai turunan di $c \in \mathbb{R}$.

Teorema 2.12

Jika fungsi $f: I \to \mathbb{R}$ terdeferensasi di $c \in I$, maka f kontinu di titik *c* .

Bukti:

Ambil sebarang $x \in I, x \neq c$

Diperoleh

$$f(x)-f(c)=\left(\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\right)(x-c)$$

Karena $f'(c)$ ada, maka dengan mengaplikasikan teorema perkalian limit diperoleh

$$\lim_{x\to c}\big(f(x)-f(c)\big)=\left(\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\right)\left(\lim_{x\to c}(x-c)\right)=f'(c).0=0$$

Jadi , $\lim_{x\to c} f(x)=f(c)$ sehingga f kontinu di c.

Contoh 2.13

Buktikan hasil diferensial dari $f(x)=x^2$ adalah $f'(x)=2x$

Bukti:

$$=\lim_{x\to c}\left[\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\right]$$

$$=\lim_{x\to c}\frac{x^2-c^2}{x-c}$$

$$=\lim_{x\to c}\frac{(x-c)(x+c)}{(x-c)}$$

$$=\lim_{x\to c}(x+c)=2c$$

Jadi diferensial dari $f(x)=x^2$ di titik c adalah $f'(x)=2x$

2.4 Fungsi konveks dan Fungsi konkaf

Fungsi konveks dan fungsi konkaf memegang peranan penting pemrograman non linear dan fungsi tersebut mempunyai daerah asal yang merupakan himpunan konveks.

Definisi 2.14 (Bartle dan Sherbet, 1994)

Sebuah himpunan X dikatakan konveks jika untuk semua $x,y\in X$ dan untuk semua $\lambda\in[0,1]$, memenuhi

$\lambda x+(1-\lambda)y\in X$

Kita menyebut $\lambda x+(1-\lambda)y$ sebagai kombinasi konveks dari x dan y.

Pada garis nyata, himpunan konveks adalah interval $a \leq x \leq b$ untuk beberapa $-\infty \leq a \leq b \leq \infty$. Dalam $\mathbb{R}^n$, himpunan konveks adalah himpunan X dengan sifat bahwa ketika menghubungkan secara linear dua titik di X, seluruh garis penghubung juga berada di X. Oleh karena itu, sebuah cakram dalam bidang adalah konveks dan sebuah kubus dalam ruang tiga dimensi adalah konveks, tetapi lingkaran dalam bidang tidak, sebuah cakram dengan pusat yang di hapus tidak, sebuah donat dalam tiga dimensi juga tidak,dll.

Pertimbangan sebuah fungsi bernilai real $f: X \to \mathbb{R}$, di mana X adalah himpunan konveks.

Contoh 2.14

Himpunan $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq r^2, r \in \mathbb{R}\}$ adalah sebuah himpunan konveks

Bukti:

Ambil sebarang(x_1, y_1) , $(x_2, y_2) \in A$ dan $\lambda \in [0,1]$

$$\{r \in \mathbb{R}: r = (x_1, y_1) + \lambda((x_2, y_2) - (x_1, y_1)), 0 \leq \lambda \leq 1\} \subseteq A$$

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} |r| &= |(x_1, y_1) + \lambda((x_2, y_2) - (x_1, y_1))| \\ &= |(1-\lambda)(x_1, y_1) + \lambda(x_2, y_2)| \end{aligned}$$

Misalkan $(x_1, y_1) = a_1 + ib_1$ dan $(x_2, y_2) = a_2 + ib_2$, maka

$$\begin{aligned} |r^2| &= ((1-\lambda)a_1 + \lambda a_2)^2 + ((1-\lambda)b_1 + \lambda b_2)^2 \\ &= (1-\lambda)^2 a_1^2 + \lambda^2 a_2^2 + 2\lambda(1-\lambda)a_1 a_2 + (1-\lambda)^2 b_1^2 + \lambda^2 b_2^2 + 2\lambda(1-\lambda)b_1 b_2 \\ &= (1-\lambda)^2(a_1^2 + b_1^2) + \lambda^2(a_2^2 + b_2^2) + \lambda(1-\lambda)(2a_1 a_2 + 2b_1 b_2) \end{aligned}$$

Karema $2xy \leq x^2 + y^2$, diperoleh

$$\begin{aligned} |r|^2 &= (1-\lambda)^2 r^2 + \lambda^2 r^2 + \lambda(a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 \\ &= (1-\lambda)^2 r^2 + \lambda^2 r^2 + \lambda(1-\lambda)(2r^2) \\ &= r^2((1-\lambda)^2 + \lambda^2 + 2\lambda(1-\lambda)) \\ &= r^2 \end{aligned}$$

Diperoleh $r \in A$

Jadi himpunan A konveks

Contoh 2.15

Fungsi $g(x) = -x^2$ adalah konveks

Bukti:

Misalkan $f(x) = -x^2$, kita akan buktikan bahwa:

$$f\left((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2\right) \le (1-\lambda) f(x_1) + \lambda f(x_2)$$

$$\begin{aligned} f\left((1-\lambda)\right)x_1 + \lambda x_2 &= -\left[(1-\lambda)x_1 + \lambda x_2\right]^2 \\ &= -\left[(1-\lambda)^2 x_1^2 + 2(1-\lambda)\lambda x_1 x_2 + \lambda^2 x_2^2\right] \end{aligned}$$

Kita bandingkan dengan:

$$\begin{aligned} (1-\lambda) f(x_1) + \lambda f(x_2) &= (1-\lambda)\left(-x_1^2\right) + \lambda\left(-x_2^2\right) \\ &= -(1-\lambda)x_1^2 - \lambda x_2^2 \end{aligned}$$

Jadi,

$$f\left((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2\right) \le (1-\lambda) f(x_1) + \lambda f(x_2)$$

Akan jika benar:

$$-\left[(1-\lambda)^2 x_1^2 + 2(1-\lambda)\lambda x_1 x_2 + \lambda^2 x_2^2 \ge (1-\lambda)x_1^2 + \lambda x_2^2\right]$$

Kalikan kedua ruas dengan -1

$$\begin{aligned} &\left[(1-\lambda)^2 - (1-\lambda)\right]x_1^2 + 2(1-\lambda)\lambda x_1 x_2 + \left(\lambda^2 - \lambda\right)x_2^2 \\ &= (1-\lambda)\left[(1-\lambda)-1\right]x_1^2 + 2(1-\lambda)\lambda x_1 x_2 + \lambda(\lambda-1)x_2^2 \\ &= -(1-\lambda)\lambda x_1^2 + 2(1-\lambda)\lambda x_1 x_2 - \lambda(1-\lambda)x_2^2 \\ &= (1-\lambda)\lambda\left(-x_1^2 + 2x_1 x_2 - x_2^2\right) \\ &= (1-\lambda)\lambda\left[-x_1^2 + 2x_1 x_2 - x_2^2\right] \\ &= (1-\lambda)\lambda\left[-(x_1 - x_2)^2\right] \le 0 \end{aligned}$$

Karena $(1-\lambda)\lambda \ge 0$ dan $(x_1 - x_2)^2 \ge 0$, maka ekspresi terakhir ≤ 0

jadi $g(x) = -x^2$ konveks

Definisi 2.16 (Bartle dan Sherbet, 1994)

Diberikan fungsi $f: I \to \mathbb{R}$. Fungsi *f* dikatakan fungsi konveks apabila

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \le \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

untuk semua $x, y \in X$

Definisi 2.17 (Bartle dan Sherbet 1994)

Fungsi $f: I \to \mathbb{R}$ dikatakan konveks pada I jika untuk setiap t yang memenuhi $0 \leq t \leq 1$ dan setiap titik $x_1, x_2 \in I$, kita memiliki

$$f((1-t)x_1 + tx_2 \leq (1-t)f(x_1) + tf(x_2)$$

Contoh 2.17

Tunjukkan bahwa fungsi linear $f(x) = ax + b$ merupakan fungsi konveks pada $\mathbb{R}$

Bukti:

Ambil sebarang $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} f((1-t)x_1 + tx_2) &= a((1-t)x_1 + tx_2) + b \\ &= (1-t)ax_1 + atx_2 + (t + 1 - t)b \\ &= (1-t)(ax_1 + b) + t(ax_2 + b) \\ &= (1-t)f(x_1) + tf(x_2) \end{aligned}$$

Jadi, fungsi $f(x) = ax + b$ konveks pada $\mathbb{R}$

Contoh 2.18

Jika $f: x \to \mathbb{R}$ adalah fungsi konveks

Tunjukkan bahwa himpunan $\{(x, y) \in \mathbb{R}^{(n+1)}, X \in x, y \geq f(x)\}$

Bukti:

Ambil sebarang $x, y \in X$ dan $\lambda \in [0,1]$

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

$$(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, \lambda y + (1-\lambda)f(y)$$

Perhatikan bahwa

(x_1, y_1) dan (x_2, y_2) adalah dua titik himpunan

$-x_1$ dan x_2 berada di f

$-y_1 \geq f(x_1)$ dan $y_2 \geq f(x_2)$

$$\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2 \geq \lambda f(x_1 + (1-\lambda)f(x_2) \geq f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)$$

Diperoleh

$$\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2$$

Berarti

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^{(n+1)}, X \in x, y \geq f(x)\}$$

Teorema 2.19

Jika *f* konveks pada *X* , maka *–f* merupakan fungsi konkav pada *X*

Bukti :

Ambil sebarang $x, y \in X$ dan $\lambda \in [0,1]$

Karena *f* konveks, maka

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

Perhatikan bahwa

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

$$-f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda f(x) - (1-\lambda)f(y)$$

Diperoleh

$$g(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda g(x) + (1-\lambda)g(y)$$

Berarti

$g(y) = f(x)$ adalah fungsi konkaf

Teorema 2.20

Jika $f(x)$ konveks, maka $\alpha f(x)$ konveks pada $\alpha > 0$

Bukti:

Ambil sebarang $x, y \in X$ dan $\lambda \in [0,1]$

Karena *f* konveks, maka

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

Perhatikan bahwa

$$\alpha f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \alpha[\lambda f(x) + (1-\lambda)g(y)]$$

Berarti

$\alpha f(x)$ juga merupakan fungsi konveks pada x dengan syarat $\alpha > 0$

Teorema 2.21

Jika f pada x dan g pada x fungsi konveks, maka $h(x) = f(x) + g(x)$ juga merupakan fungsi konveks

Bukti :

Ambil sebarang $x, y \in X$ dan $\lambda \in [0,1]$

Karena *f* konveks pada *X*, maka

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

Karena *g* konveks pada *X*, maka

$$g(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda g(x) + (1-\lambda)g(y)$$

Diperoleh

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) + g(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) + \lambda g(x) + (1-\lambda)g(y)$$

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) + g(\lambda x(1-\lambda)y) \leq \lambda(f(x) + g(x)) + (1-\lambda)(f(x) + g(x))$$

Akibat

$$h(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda y(x) + (1-\lambda)h(y)$$

berarti

$h(x) = f(x) + g(x)$ adalah fungsi konveks

Teorema 2.22

Jika $f(x)$ dan $g(x)$ adalah fungsi konveks, maka $h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ juga merupakan fungsi konveks

Bukti:

Ambil sebarang $x, y \in X$ dan $\lambda \in [0,1]$

Karena *f* konveks, maka

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

Perhatikan bahwa

$$g(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda g(x) + (1-\lambda)g(y)$$

Diperoleh

$$h(\lambda x+(1-\lambda)y)=\max\{f(\lambda x+(1-\lambda)y),\lambda g(x)+(1-\lambda)g(y)\}$$
$$\leq \lambda \max\{\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y),\lambda g(x)+(1-\lambda)g(y)\}$$
$$\leq \lambda \max\{f(x),g(x)\}+(1-\lambda)\max\{f(y),g(y)\}$$
$$=\lambda h(x)+(1-\lambda)h(y)$$

Berarti

$h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ konveks

Teorema 2.23

Jika $(x;\alpha)$, fungsi konveks dalam x untuk semua α maka $g(x) = max - \alpha f(x;\alpha)$ adalah fungsi konveks

Bukti:

Ambil sebarang $x, y \in X$ dan $\lambda \in [0,1]$

Karena *f* konveks, maka

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

Perhatikan bahwa

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y;\alpha) \leq \lambda f(x;\alpha) + (1-\lambda)f(y;\alpha)$$

Diperoleh

$g(x) = max - \alpha f(x;\alpha)$

$$g(\lambda x+(1-\lambda)y)=\max-\alpha f(\lambda x+(1-\lambda)y;\alpha)$$
$$\leq \max-\alpha(\lambda f(x;\alpha)+(1-\lambda)f(y;\alpha))$$
$$\leq \lambda \max-\alpha f(x;\alpha)+(1-\lambda)\max-\alpha f(y;\alpha)$$
$$=\lambda g(x)+(1-\lambda)g(y)$$

Berarti

$g(x) = max - \alpha f(x;\alpha)$ adalah fungsi konveks

Teorema 2.24

Diberikan fungsi $f: I \to \mathbb{R}$. Fungsi *f* konveks pada interval *I* jika dan hanya jika untuk setiap $a, b, c \in I$ berlaku

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(c)-f(a)}{c-a}$$

Untuk $a < b < c$.

Bukti:

Sub, $a = x_1, b = (1-t)a + tc, c = x_2$ kepertidaksamaan

$f((1-t)x_1 + tx_2) \leq (1-t)f(x_1) + tf(x_2)$

Ambil sebarang $a < b$ berada dalam I

Perhatikan bahwa f merupakan fungsi konveks jika dan hanya jika untuk $b \in [a, c]$

Maka $f(b) \leq I(b)$

Sehingga diperoleh

$$f(b) \leq \frac{f(c) - f(a)}{c - a}(b - a) + f(a)$$

$$f(b) - f(a) \leq \frac{f(c) - f(a)}{c - a}(b - a)$$

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(c) - f(a)}{c - a}$$

Teorema 2.25

Jika fungsi $f: I \to \mathbb{R}$ konveks pada interval terbuka I , maka f kontinu pada I

Bukti:

Catatan : Jika *I* bukan interval terbuka, maka *f* belum tentu kontinu pada *I*. sebagai contoh, berikan fungsi $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dengan

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1 \\ 2, & |x| \geq 1 \end{cases}$$

merupakan fungsi konveks pada $[-1,1]$, tetapi tidak kontinu pada $[-1,1]$.

Misalkan, $I = (a, b)$, berarti *f* merupakan fungsi konveks dalam (a, b) dan misal $[c, d] \subseteq (a, b)$

Pilih c_1 dan d_1 sedemikian sehingga

$a < c_1 < c, d < d_1 < b$ jika $x, y \in [c, d]$ dengan $x < y$

maka berdasarkan terorema 2.24 diperoleh

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq \frac{f(c)-f(c_1)}{c-c_1}, \text{ dan}$$

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(d)-f(y)}{d-y} \leq \frac{f(d_1)-f(d)}{d_1-d}$$

Hal ini menunjukkan bahwa himpunan

$$\left\{\left|\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\right| : c \leq x < y \leq d\right\} \text{ dibatasi oleh } M > 0$$

Berarti,

$|f(y)-f(x)| \leq M|y-x|$ dan oleh karena itu f kontinu seragam pada $[c,d]$ mengingat kontinu seragam juga dapat diartikan kontinu secara umum, berarti kita telah menunjukkan bahwa f kontinu pada $[c,d]$. Karena interval $[c,d]$ sebarang, maka f kontinu di $[a,b] = I$.

BAB V

PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Fungsi quasikonveks dan quasikonkaf saling berhubungan erat, seperti yang dijelaskan dalam Teorema 4.9 dan 4.10. Teorema 4.9 menunjukkan bahwa fungsi quasikonveks juga quasikonkaf, dan sebaliknya, fungsi konkaf menjadi quasikonkaf jika himpunannya konveks. Fungsi konveks menjadi quasikonveks menurut Teorema 4.11, namun fungsi quasikonveks tidak selalu konveks. Sifat-sifat lainnya menunjukkan bahwa penjumlahan dua fungsi quasikonveks belum tentu menghasilkan fungsi quasikonveks (Teorema 4.13), dan fungsi monoton menjadi quasikonveks dan quasikonkaf (Teorema 4.14).

Teorema 4.16 hingga 4.18 membahas hubungan turunan dengan sifat quasikonveksitas dan quasikonkafitas pada fungsi diferensial. Fungsi quasikonveks dan quasikonkaf dapat dikenali melalui turunan pertama dan kedua (Teorema 4.16 dan 4.17), sementara Teorema 4.18 menyatakan bahwa fungsi kontinu dua kali terdeferensiasi adalah quasikonveks jika memenuhi kondisi tertentu pada turunannya. Teorema 4.20 memberi syarat determinan Hessian untuk fungsi quasikonkaf. Contoh dalam Teorema 4.21 menunjukkan bahwa fungsi kuadrat yang membuka ke bawah adalah quasikonkaf jika koefisien $a < 0$.

5.2 Saran

1. penting untuk memperdalam pemahaman mengenai perbedaan mendasar antara fungsi quasikonveks dan quasikonkaf, serta bagaimana karakteristik masing-masing mempengaruhi aplikasinya dalam teori optimasi.
2. Disarankan agar topik ini dieksplorasi lebih lanjut dalam konteks penerapan praktis, seperti dalam desain algoritma optimasi non-linier dan pemrograman matematika, karena fungsi quasikonveks dan quasikonkaf sering muncul dalam masalah-masalah yang melibatkan fungsi-fungsi yang tidak sepenuhnya konveks atau konkaf.

DAFTAR PUSTAKA

Beck, A. (2014). *Theory, Algorithms, and Applications with MATLAB.* Israel: Similarly.

Bertsekas, D. P. (2009). *Convex Optimization Theory.* U.S.A: Cataloging-in-Publication Data.

KWON, R. H. (2014). *LINEAR OPTIMIZATION and EXTENSIONS with MATLAB.* Francis: Department of Industrial and Manufacturing Engineering The Pennsylvania State University-University Park, PA.

MOKHTAR S. BAZARAA, H. D. (2006). *Theory and Algorithms.* Canada: by John Wiley & Sons, Inc. All ringhts reserved.

Nachbar, J. (2018). *Concave and Convex Functions.* Washington University: Creative Commons .

Ok, E. A. (2006). *Real Analysis With Economi Applications.* University press.

Osborne, M. J. (1997). *Mathematica Methods for Economi Theory.* University of Toronto.

Peter Kwasi Sarpong, A. O.-H.-P. (2018). Application of Convex Function and Concave Functions. *Journal of Researchers (DIJR)*, Vol 3, Issue 05, May, 2018, Pages 01-14.

Robert G. Bartle, D. R. (1994). *REAL ANALYSIS.* America: Library of conggres Catologin.

ROCKAFELLAR, R. T. (1858). *Convex Analysis.* PRINCETON UNIVERCITY: WERNER FENCHEL.

Sen, S. S. (2020). Concave And Convex Functions. *Variabel Optimation*, SSOS, IGNOU.

Stephen Boyd, L. V. (2004). *Convex Optimization.* Singapore: cambridge university press.

Vanderbei, R. J. (1996). *Linear Programming.* Princeton, NJ, USA: Departement of Operations Research and Financial Engineering Princeton University.

Vika andina, E. C. (2015). Keunggulan dari fungsi quasikonveks ini membuatnya ideal untuk mengatasi masalah optimisasi dan pemodelan preferensi yang tidak dapat ditangani dengan fungsi konveks biasa. Fungsi quasikonveks mempertahankan sifat yang lebih stabil terhadap transformasi m. *ErikaMatika*, vol 3, No.1.

Yboon Garcia, F. f.-B. (2017). *ABOUT THE SUM OF QUASICONVEX FUNCTIONS.* UNIVERSIDAD DEL PACIFICO: Documento de Discusion CIUP.