SKRIPSI

ANALISIS MODEL MATEMATIKA DINAMIKA CINTA ZAINUDDIN DAN HAYATI DALAM FILM TENGGELAMNYA KAPAL VAN DER WIJCK

ALNISARI. M

E0121004

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS SULAWESI BARAT
TAHUN 2025

SKRIPSI

ANALISIS MODEL MATEMATIKA DINAMIKA CINTA ZAINUDDIN DAN HAYATI DALAM FILM TENGGELAMNYA KAPAL VAN DER WIJCK

ALNISARI. M

E0121004

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS SULAWESI BARAT
TAHUN 2025

SKRIPSI

ANALISIS MODEL MATEMATIKA DINAMIKA CINTA ZAINUDDIN DAN HAYATI DALAM FILM TENGGELAMNYA KAPAL VAN DER WIJCK

Diajukan sebagai salah satu syarat memperoleh gelar sarjana pada
Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan
Alam Universitas Sulawesi Barat

ALNISARI. M

E0121004

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS SULAWESI BARAT
TAHUN 2025

PERSEMBAHAN

“ Skripsi ini saya persembahkan untuk Mama dan Bapak serta Kakak – Adik tercinta”

MOTTO

“Pakai pakaianmu jangan iri dengan pakaian orang lain”

-Mansyur Latif (Bapakku)-

"Whenever you see someone more successful than you, it's because they are doing something that you might not be doing."

SURAT PERNYATAAN

Yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: Alnisari. M
Tempat/Tgl Lahir	: Ujung, 03 Desember 2003
Nim	: E0121004
Program Studi	: Matematika

Menyatakan bahwa tugas akhir dengan judul "Analisis Model Matematika Dinamika Cinta Zainuddin dan Hayati Dalam Film *Tenggelamnya Kapal Van Der Wijck*" disusun berdasarkan prosedur ilmiah yang telah melalui pembimbingan dan bukan merupakan plagiat dari karya ilmiah/naskah yang lain. Apabila kemudian hari terbukti bahwa pernyataan ini benar, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai peraturan yang berlaku.

Majene, Februari 2025

Alnisari. M

HALAMAN PENGESAHAN

Skripsi ini diajukan oleh:

Nama	:	Alnisari. M
NIM	:	E0121004
Judul Penelitian	:	Analisis Model Matematika Dinamika Cinta Zainuddin dan Hayati Dalam Film *Tenggelamnya Kapal Van Der Wijck*

Telah berhasil dipertanggungjawabkan dihadapan Tim Penguji (SK Nomor 28/UN55.7/HK.04/2025, tanggal 24 Maret 2025) dan diterima sebagai bagian persyaratan memperoleh gelar sarjana S1 pada Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Sulawesi Barat.

Disahkan Oleh:

Dekan FMIPA
Universitas Sulawesi Barat

Musafira, S.Si., M.Sc.
NIP. 197709112006042002

Tim Penguji:

Ketua Penguji	: Musafira, S.Si., M.Sc.	(.........................)
Sekretaris	: Fardinah, S.Si., M.Sc.	(.........................)
Pembimbing 1	: Muh. Rifandi, S.Si., M.Si.	(.........................)
Pembimbing 2	: Andi Seppewali, S.Kom., M.Kom.	(.........................)
Penguji 1	: Darmawati, S.Si., M.Si.	(.........................)
Penguji 2	: Fardinah, S.Si., M.Sc.	(.........................)
Penguji 3	: Meryta Febrilian Fatimah, S.Si., M.Sc.	(.........................)

ABSTRAK

Penelitian ini membahas Analisis Model Matematika Dinamika Cinta Zainuddin dan Hayati dalam Film *Tenggelamnya Kapal Van Der Wijck* dengan tujuan memodelkan hubungan emosional antara kedua tokoh utama menggunakan pendekatan sistem persamaan diferensial. Model ini mempertimbangkan beberapa variabel utama, yaitu besarnya cinta Zainuddin terhadap Hayati (Z_H), besarnya cinta Hayati terhadap Zainuddin (H_Z), dan pengaruh orang ketiga, yaitu Aziz (A_H). Selain itu, faktor-faktor lain seperti perjuangan Zainuddin
(P_Z), ketertarikan awal (α, θ, ω), respon cinta (β, γ), serta pengurangan dan pertambahan cinta seiring waktu $(\mu, \delta, \sigma, \pi)$ juga dimasukkan dalam model untuk menggambarkan dinamika hubungan secara matematis. Proses analisis dilakukan melalui simulasi menggunakan aplikasi Python 3.13.1, di mana nilai parameter diambil berdasarkan asumsi yang sesuai dengan alur cerita dalam film. Hasil simulasi menunjukkan bahwa cinta Hayati terhadap Zainuddin berbanding lurus dengan besarnya perjuangan yang dilakukan Zainuddin. Semakin besar perjuangan Zainuddin (P_Z), semakin besar pula cinta Hayati (H_Z) terhadapnya, dan sebaliknya. Selain itu, kehadiran orang ketiga (A_H) dan laju pengurangan cinta secara alami (μ) mempengaruhi penurunan intensitas cinta di antara kedua tokoh seiring waktu.

Kata Kunci: Model Matematika, Dinamika Cinta, Sistem Persamaan Diferensial, *Tenggelamnya Kapal Van Der Wijck.*

ABSTRACT

This study discusses the Mathematical Model Analysis of Zainuddin and Hayati's Love Dynamics in the Film Tenggelamnya Kapal Van Der Wijck with the aim of modeling the emotional relationship between the two main characters using a differential equation system approach. This model considers several main variables, namely the amount of Zainuddin's love for Hayati ($\boldsymbol{Z_H}$), the amount of Hayati's love for Zainuddin ($\boldsymbol{H_Z}$), and the influence of a third person, namely Aziz ($\boldsymbol{A_H}$). In addition, other factors such as Zainuddin's struggle ($\boldsymbol{P_Z}$), initial attraction ($\boldsymbol{\alpha, \theta, \omega}$), love response ($\boldsymbol{\beta, \gamma}$), and the reduction and increase of love over time ($\boldsymbol{\mu, \delta, \sigma, \pi}$) are also included in the model to mathematically describe the dynamics of the relationship. The analysis process is carried out through simulations using the Python 3.13.1 application, where parameter values are taken based on assumptions that are in accordance with the storyline in the movie. The simulation results show that Hayati's love for Zainuddin is directly proportional to the magnitude of Zainuddin's struggle. The greater Zainuddin's struggle ($\boldsymbol{P_Z}$), the greater Hayati's love ($\boldsymbol{H_Z}$) for him, and vice versa. In addition, the presence of a third person ($\boldsymbol{A_H}$) and the natural rate of love reduction ($\boldsymbol{\mu}$) affect the decrease in love intensity between the two characters over time.

Keywords: Mathematical Model, Dynamical of Love, Differential Equation System, Tenggelamnya Kapal Van Der Wijck.

BAB I
PENDAHULUAN

Pada bab ini berisi pengantar awal dari penelitian yang mencakup latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, dan manfaat penelitian. Pembahasan dalam bab ini bertujuan untuk menjelaskan alasan dilakukannya penelitian serta arah dan fokus kajian yang akan dibahas pada bab-bab selanjutnya.

1.1 Latar Belakang

"Tenggelamnya Kapal Van Der Wijck" adalah sebuah film yang menceritakan kisah cinta tragis antara Zainuddin, seorang pemuda keturunan campuran Minang dan Bugis, dengan Hayati, seorang gadis Minang. Kisah mereka berlangsung dalam latar budaya Minangkabau yang kental dengan adat dan norma-norma sosial yang kuat. Zainuddin yang sejak awal menunjukkan ketulusan dan kesungguhan cintanya terhadap Hayati harus menghadapi berbagai rintangan, termasuk penolakan dari keluarga Hayati yang lebih memilih Aziz, seorang pemuda kaya dan terpandang, sebagai calon suami Hayati.

Tragedi cinta mereka mencapai puncaknya ketika Hayati yang terpaksa menikah dengan Aziz demi kehormatan keluarganya, akhirnya menyadari bahwa cintanya kepada Zainuddin tidak pernah pudar. Namun, penyesalan datang terlambat karena Zainuddin yang merasa dikhianati memutuskan untuk menjauh dari Hayati. Konflik batin yang mendalam, perasaan cinta yang terbelah antara kewajiban dan hasrat, serta konsekuensi dari pilihan-pilihan yang dibuat oleh kedua tokoh utama ini menjadikan film ini sebagai cerminan dari pergulatan emosional manusia yang kompleks.

Pemodelan matematika memberikan cara untuk merumuskan hubungan yang rumit ini dalam bentuk yang lebih terstruktur dan kuantitatif. Dengan menggunakan pemodelan matematika, kita dapat merepresentasikan hubungan antara Zainuddin dan Hayati serta faktor-faktor eksternal yang mempengaruhi mereka. Persamaan diferensial dapat digunakan untuk menggambarkan dinamika perubahan perasaan dan interaksi mereka seiring waktu. Pendekatan ini tidak hanya menawarkan perspektif baru dalam memahami cerita, tetapi juga memungkinkan kita untuk menganalisis stabilitas hubungan mereka dan memprediksi bagaimana peristiwa-peristiwa tertentu dapat mempengaruhi perkembangan hubungan tersebut.

Penelitian sebelumnya telah menunjukkan bahwa pendekatan matematis dapat digunakan untuk merepresentasikan dinamika ketergantungan sosial maupun hubungan emosional, seperti pada model SIR untuk ketergantungan media sosial (Oktavia, N., & Rosha, M., 2023) dan model diferensial cinta antara tokoh-tokoh nyata seperti Charles dan Diana (Adriana, T., 2013). Di sisi lain, pendekatan sastra juga mengungkapkan bagaimana norma sosial seperti adat Minangkabau dapat menjadi hambatan dalam hubungan cinta, sebagaimana tergambar dalam kisah Zainuddin dan Hayati (Winarti, S., 2023). Ketiga kajian tersebut menegaskan bahwa fenomena emosional dalam hubungan antar manusia dapat dianalisis secara mendalam melalui pendekatan matematis dan kultural, namun belum ada secara khusus memodelkan dinamika perasaan dalam karya sastra atau film yang mengangkat kisah cinta tokoh fiksi Zainuddin dan Hayati dalam *Tenggelamnya Kapal Van Der Wijck*. Oleh karena itu, penulis berinisiatif untuk mengisi kekosongan ini dengan merumuskan dan mengembangkan model matematis yang dapat memberikan gambaran yang lebih sistematis dan terukur mengenai interaksi dan evolusi perasaan kedua tokoh ini dalam konteks film tersebut.

Berdasarkan uraian di atas, penulis tertarik mengkaji tentang pemodelan matematika dengan judul **" Analisis Model Matematika Dinamika Cinta Zainuddin dan Hayati Dalam Film *Tenggelamnya Kapal Van Der Wijck*"**.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang masalah yang telah diuraikan, maka rumusan masalah pada penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Bagaimana model matematika dinamika cinta pada hubungan Zainuddin dan Hayati dalam film *Tenggelamnya Kapal Van Der Wijck*?
2. Bagaimana analisis model matematika dinamika cinta pada hubungan

Zainuddin dan Hayati dalam film *Tenggelamnya Kapal Van Der Wijck*?

3. Bagaimana simulasi numerik dan interpretasi matematika dinamika cinta pada hubungan Zainuddin dan Hayati dalam film *Tenggelamnya Kapal Van Der Wijck*?

1.3 Tujuan Penelitian

Penelitian ini bertujuan untuk:

1. Untuk mengetahui bagaimana model matematika dinamika cinta pada hubungan Zainuddin dan Hayati dalam film *Tenggelamnya Kapal Van Der Wijck*.
2. Untuk mengetahui Bagaimana analisis model matematika dinamika cinta pada hubungan Zainuddin dan Hayati dalam film *Tenggelamnya Kapal Van Der Wijck*.
3. Untuk mengetahui bagaimana simulasi numerik dan interpretasi matematika dinamika cinta pada hubungan Zainuddin dan Hayati dalam film *Tenggelamnya Kapal Van Der Wijck*.

1.4 Manfaat penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat memberikan manfaat bagi:

1. Bagi Pembaca

   Penelitian ini memberikan perspektif baru dalam memahami karya sastra dengan menggabungkan analisis sastra dan pemodelan matematika. Pendekatan ini memungkinkan pembaca untuk menganalisis hubungan antar karakter secara lebih terstruktur dan mendalam.
2. Bagi Peneliti

   Penelitian ini memberikan kontribusi pada pengembangan ilmu matematika terapan dengan menunjukkan bagaimana konsep matematika dapat digunakan untuk menganalisis fenomena emosional dalam karya sastra. Selain itu, penelitian ini membuka peluang bagi studi interdisipliner antara matematika dan humaniora.
3. Bagi Universitas

Penelitian ini memperkuat reputasi universitas sebagai institusi yang mendukung penelitian inovatif dan kolaborasi lintas disiplin ilmu, khususnya dalam mengintegrasikan pendekatan matematika dengan bidang sastra dan psikologi.

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini menyajikan landasan teori yang menjadi dasar dalam penyusunan penelitian ini. Tinjauan pustaka mencakup teori-teori yang relevan, hasil penelitian terdahulu, serta konsep-konsep utama yang mendukung analisis dalam penelitian. Bab ini terdiri dari 10 sub bab, antara lain pemodelan matematika, persamaan diferensial, sistem persamaan diferensial, solusi persamaan diferensial, titik kesetimbangan, matriks jacobian, nilai eigen, kriteria routh hurwits, sinopsis film *Tenggelamnya Kapal Van Der wijck* dan penelitian relevan.

2.1 Pemodelan Matematika

Pemodelan matematika merupakan suatu proses merepresentasikan dan menjelaskan permasalahan pada dunia nyata ke dalam pernyataan matematis (Widowati & Sutimin, 2007). Dalam proses ini, peneliti menyusun hipotesis dan asumsi yang realistis agar sistem atau fenomena yang dianalisis dapat direpresentasikan secara matematis. Pemodelan ini sangat penting karena dapat membantu dalam menyederhanakan kompleksitas masalah sambil tetap mempertahankan unsur-unsur kunci yang diperlukan untuk analisis. Dengan menggunakan pemodelan matematika, peneliti dapat memprediksi perilaku sistem di masa depan dan mengidentifikasi hubungan antara berbagai variabel yang terlibat. Diberikan tahapan pemodelan matematika sebagai berikut:

1. Identifikasi Masalah

   Langkah pertama adalah mengidentifikasi masalah. Dalam proses ini, perlu menentukan tujuan dan merumuskan pertanyaan yang ingin dicari solusinya.
2. Membuat Asumsi

   Selanjutnya, menyusun asumsi mengenai model yang akan diformulasikan berdasarkan tujuan dari identifikasi masalah.
3. Formulasi Model Matematika

Setelah asumsi dibuat, langkah berikutnya adalah merumuskan model matematika. Model yang disusun harus sesuai dengan asumsi yang telah ditetapkan dan mencakup faktor-faktor dalam bentuk persamaan.

4. Mencari Solusi Model Matematika

   Langkah berikutnya adalah mencari solusi dari model matematika menggunakan metode analitik atau numerik. Solusi analitik digunakan untuk model sederhana, sedangkan model yang kompleks memerlukan simulasi numerik melalui program komputer.

5. Interpretasi Hasil

   Hasil yang diperoleh dari model matematika perlu diinterpretasikan secara realistis sesuai dengan bidang penerapannya.

6. Validasi Model

   Langkah terakhir adalah memvalidasi model dengan memeriksa apakah hasil yang diperoleh sesuai dengan kenyataan dan asumsi yang telah dibuat.

2.2 Persamaan Diferensial

Definisi 2.2.1 (Syafitri, M., 2025)

Persamaan diferensial merupakan persamaan yang melibatkan turunan dari satu atau lebih variabel tak bebas terhadap satu atau lebih variabel bebas. Salah satu persamaan diferensial yaitu persamaan diferensial biasa.

Diberikan definisi persamaan diferensial biasa sebagai berikut.

Definisi 2.2.2 (Pratiwi, W., et al., 2021)

Persamaan diferensial biasa merupakan persamaan diferensial yang melibatkan turunan biasa dari satu atau lebih variabel tak bebas terhadap satu variabel bebas.

Berdasarkan defenisi 2.2.2 diberikan contoh sebagai berikut.

Contoh 2.2.1

$$\frac{dy}{dx} + 2x\frac{dy}{dx} + 2y = 0 \tag{2.1}$$

Persamaan (2.1) merupakan persamaan diferensial orde satu dengan variabel bebas x dan variabel tak bebas y.

Penyelesaian persamaan (2.1)

$$\frac{dy}{dx} + 2x\frac{dy}{dx} + 2y = 0$$

Gabungkan suku-suku sejenis

$$(1+2x)\frac{dy}{dx} + 2y = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2y}{1+2x}$$

Pisahkan variabel

$$\frac{1}{y}dy = \frac{-2}{1+2x}dx$$

Integrasi kedua ruas

$$\int \frac{1}{y}dy = \int \frac{-2}{1+2x}dx$$

Integrasi ruas kiri

$$\int \frac{1}{y}dy = \ln|y| + C_1$$

Integrasi ruas kanan

$$\int \frac{-2}{1+2x}dx$$

Substitusi $u = 1 + 2x$ sehingga $du = 2x$ atau $dx = \frac{du}{2}$

$$\int \frac{-2}{1+2x}dx = \int \frac{-2}{u} \cdot \frac{du}{2}$$

$$= \int \frac{-du}{u}$$

$$= \int \frac{-1}{u}du$$

$$= -\ln|u| + C_2$$

Kembalikan substitusi u kedalam bentuk x

$$-\ln|u| + C_2 = -\ln|1+2x| + C_2$$

Gabungkan hasil integrasi kedua ruas

$$\begin{aligned} \ln|y| + C_1 &= -\ln|1+2x| + C_2 \\ \ln|y| &= -\ln|1+2x| + C \\ e^{\ln|y|} &= e^{-\ln|1+2x|} \cdot e^{C} \\ |y| &= \frac{e^{C}}{|1+2x|} \end{aligned}$$

Jika didefinisikan $e^{C} = C$ (sebuah konstanta baru), maka diperoleh:

$$|y| = \frac{C}{|1+2x|}$$

Sehingga solusi umum untuk y adalah:

$$y = \frac{C}{1+2x}$$

2.3 Sistem Persamaan Diferensial

Definisi 2.3.1 (Ross, S.L., 2004)

Sistem persamaan diferensial adalah kumpulan beberapa persamaan diferensial dengan kata lain suatu sistem yang memuat n persamaan diferensial, dengan n fungsi yang tidak diketahui, di mana n merupakan bilangan bulat positif lebih besar sama dengan dua atau lebih. Antar persamaan diferensial yang satu dengan yang lain saling terkait dan konsisten.

Secara matematis sistem persamaan diferensial dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\dot{x}(t) = f(t, x) \tag{2.2}$$

$$\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{pmatrix}, f(t,x) = \begin{pmatrix} f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

Dengan $x_1, x_2, \dots, x_n$ adalah variabel tak bebas dan t adalah variabel bebas. Jika pada $f(t,x)$, variabel t tidak dinyatakan bebas secara eksplisit, maka pada sistem (2.2) disebut sistem otomus dan dapat ditulis sebagai berikut:

$$\dot{x}(t) = f(x) \tag{2.4}$$

$$\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{pmatrix}, f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

Adapun Sistem otonomus adalah sistem persamaan diferensial, dimana perubahan suatu variabel hanya bergantung pada nilai variabel itu sendiri dan tidak bergantung langsung pada waktu $(\boldsymbol{t})$. Sedangkan pada sistem non-otonumus, perubahan suatu variabel bergantung tidak hanya pada nilai variabel itu sendiri, tetapi juga pada waktu $(\boldsymbol{t})$ atau variabel lain yang mempengaruhi sistem.

2.4 Solusi Persamaan Diferensial

Definisi 2.4.1 (Rifandi, M., & Abdy, M., 2023)

Solusi persamaan diferensial adalah suatu fungsi yang memuat variabel bebas dan variabel tak-bebas dimana apabila fungsi tersebut dan turunan-turunannya disubstitusi ke dalam persamaan diferensial maka hasilnya akan memenuhi persamaan tersebut.

Diberikan contoh sebagai berikut.

Contoh 2.4.1

Buktikan fungsi $f(x) = y = x^2 - 2x - 1$ merupakan solusi dari persamaan diferensial $\frac{dy}{dx} = 2(y - x^2 + 3x)$

Jawab:

Karena $y = x^2 - 2x - 1$ berarti $\frac{dy}{dx} = 2x - 2$

Substitusi y dan $\frac{dy}{dx}$ ke persamaan diferensial $\frac{dy}{dx} = 2(y - x^2 + 3x)$ diperoleh

$2x - 2 = 2(x^2 - 2x - 1 - x^2 + 3x)$

$2x - 2 = 2(x - 1)$

$2x - 2 = 2x - 2$

Karena ruas kanan sama dengan ruas kiri maka terbukti bahwa $y = x^2 - 2x - 1$ adalah solusi persamaan diferensial $\frac{dy}{dx} = 2(y - x^2 + 3x)$.

2.5 Titik Kesetimbangan

Titik kesetimbangan adalah titik yang tetap konstan seiring berjalannya waktu. Dengan kata lain, saat $\boldsymbol{t = 1, 2, 3, \ldots, n}$, nilai titik tersebut tidak mengalami perubahan.

Definisi 2.5.1 (Edwards, C. H., & Penney, D. E. 2000)

Titik $\boldsymbol{x}^* = (\boldsymbol{x_1^*}, \boldsymbol{x_2^*}, \cdots, \boldsymbol{x_n^*})$ disebut sebagai titik kesetimbangan sistem $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ jika memenuhi $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_1^*}, \boldsymbol{x_2^*}, \cdots, \boldsymbol{x_n^*}) = \boldsymbol{0}$

Jadi, $\boldsymbol{x}^*$ adalah titik kesetimbangan (2.4) jika dan hanya jika $\boldsymbol{x}^*$ disubstitusikan ke dalam $\boldsymbol{f}$ hasilnya sama dengan nol. Titik kesetimbangan dapat ditentukan dengan metode substitusi.

Berikut diberikan contoh cara menentukan titik kesetimbangan sebagai berikut.

Contoh 2.5.1

Diberikan sistem persamaan diferensial nonlinear.

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}_1 = \boldsymbol{x_1} - \boldsymbol{x_2}^2 \\ \dot{\boldsymbol{x}}_1 = \boldsymbol{x_2} - \boldsymbol{x_1} \end{cases} \tag{2.6}$$

Berdasarkan definisi 2.5.1 sistem (2.6) dapat ditulis menjadi

$$\boldsymbol{x_1 - x_2{}^2 = 0} \tag{2.7}$$

$$\boldsymbol{x_2 - x_1 = 0} \tag{2.8}$$

Selanjutnya akan dicari titik kesetimbangan sistem (2.6) dengan metode substitusi. Berdasarkan persamaan (2.8) diperoleh

$$\boldsymbol{x_2 = x_1}$$

Substitusi ke persamaan (2.7) diperoleh

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x_1 - x_1{}^2} &\boldsymbol{= 0} \\ \boldsymbol{x_1(1 - x_1)} &\boldsymbol{= 0} \end{aligned}$$

Jadi $\boldsymbol{x_1 = 0}$ dan $\boldsymbol{x_2 = 0}$ atau $\boldsymbol{x_1 = 1}$ dan $\boldsymbol{x_2 = 1}$

Diperoleh titik kesetimbangan sistem (2.6) yaitu $(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{0})$ dan $(\boldsymbol{1}, \boldsymbol{1})$.

2.6 Matriks Jacobian

Definisi 2.7.1 (Perko, L., 1991)

Matriks Jacobian adalah matriks yang berisi turunan parsial pertama dari suatu fungsi terhadap variabel-variabel bebasnya. Definisi matriks Jacobian diberikan fungsi $\boldsymbol{f} = (\boldsymbol{f_1}, \boldsymbol{f_2}, \dots, \boldsymbol{f_n})$ dengan $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{E}$ dan fungsi kontinu, kemudian $\boldsymbol{i} = \boldsymbol{i_1}, \boldsymbol{i_2}, \dots, \boldsymbol{i_n}$, dimana $\boldsymbol{E} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ dan $\boldsymbol{E}$ himpunan terbuka. Matriks jacobian $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*))$ dinyatakan sebagai berikut:

$$J(f(x^*)) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x^*) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x^*) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x^*) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x^*) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x^*) & & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x^*) \\ & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x^*) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(x^*) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x^*) \end{bmatrix}$$

Dinamakan matriks Jacobian dari $\boldsymbol{f}$ di titik $\boldsymbol{x}^*$

2.7 Nilai Eigen

Definisi 2.7.1 (Lay, D.C., 2012)

Nilai eigen (*eigenvalue*) adalah suatu bilangan skalar $\boldsymbol{\lambda}$ yang memenuhi hubungan

$$\boldsymbol{A}\mathbf{v} = \boldsymbol{\lambda}\mathbf{v}$$

Dimana $\boldsymbol{A}$ adalah matriks persegi berdimensi $\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n}$, dan $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ adalah vektor kolom (eigenvektor) yang sesuai. Dalam konteks ini, vektor $\mathbf{v}$ mengalami transformasi oleh $\boldsymbol{A}$, tetapi arah vektor tersebut tetap, hanya panjangnya yang berubah.

Nilai eigen dapat diperoleh dengan menyelesaikan persamaan karakteristik berikut:

$$\mathbf{det}(\boldsymbol{\lambda I} - \boldsymbol{A}) = \mathbf{0}$$

Dimana $\boldsymbol{I}$ adalah matriks identitas berukuran $\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n}$. Penyelesaian dari determinan tersebut akan menghasilkan nilai-nilai $\boldsymbol{\lambda}$ yang disebut sebagai nilai eigen dari matriks $\boldsymbol{A}$.

Dalam pemodelan matematika, khususnya pada sistem persamaan diferensial nonlinear, nilai eigen digunakan untuk menentukan sifat dinamika sistem. Jika sistem model dinyatakan sebagai:

$$\frac{\boldsymbol{dx}}{\boldsymbol{dt}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$$

maka perilaku solusi di sekitar titik kesetimbangan sangat dipengaruhi oleh nilai eigen dari matriks Jacobian $\boldsymbol{f} = \frac{\boldsymbol{\partial f}}{\boldsymbol{\partial x}}$ yang dievaluasi di titik kesetimbangan tersebut. Berdasarkan bagian real dari nilai eigen Jacobian, kita dapat menentukan apakah solusi sistem stabil, tidak stabil, atau bersifat osilasi (Khalil, H.K., 2002).

Adapun penjelasan klasifikasinya adalah sebagai berikut:

1. Apabila seluruh nilai eigen Jacobian memiliki bagian real negatif, maka titik kesetimbangan bersifat stabil, artinya solusi sistem akan menuju titik ekuilibrium seiring waktu.
2. Apabila terdapat setidaknya satu nilai eigen dengan bagian real positif, maka titik kesetimbangan dikatakan tidak stabil, karena solusi akan menjauh dari titik tersebut.
3. Apabila nilai-nilai eigen berbentuk kompleks dengan bagian real nol, maka sistem menunjukkan perilaku osilatif periodik di sekitar titik kesetimbangan.

Contoh 2.7.1

Diberikan sistem persamaan diferensial nonlinear berikut:

$$\boldsymbol{\frac{dx}{dt} = -x + xy}$$

$$\boldsymbol{\frac{dy}{dt} = -y}$$

Titik kesetimbangan diperoleh dengan mensyaratkan turunan terhadap waktu sama dengan nol

$$\boldsymbol{-x + xy = 0} \tag{2.9}$$

$$\boldsymbol{-y = 0} \tag{2.10}$$

Dari persamaan (2.10) diperoleh $\boldsymbol{y = 0}$. Substitusi ke persamaan (2.9)

$$\boldsymbol{-x + x(0) = 0}$$

$$\boldsymbol{-x = 0}$$

$$\boldsymbol{x = 0}$$

Sehingga titik kesetimbangan sistem adalah $(x, y) = (0,0)$

Untuk menganalisis stabilitas titik kesetimbangan, kita tentukan matriks Jacobian dari sistem, yaitu matriks turunan parsial dari fungsi-fungsi di ruas kanan terhadap variabel x dan y

$$J(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x}(-x + xy) & \frac{\partial}{\partial y}(-x + xy) \\ \frac{\partial}{\partial x}(-y) & \frac{\partial}{\partial y}(-y) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1+y & x \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Evaluasi matriks Jacobian pada titik kesetimbangan $(0,0)$ menghasilkan:

$$J(0,0) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Nilai eigen λ dari matriks Jacobian ditentukan dengan menyelesaikan persamaan karakteristik:

$$\det(\lambda I - J) = 0$$

Dimana I adalah matriks identitas, untuk $J(0,0)$, persamaannya menjadi:

$$\det\left(\lambda\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\det\begin{bmatrix} \lambda+1 & 0 \\ 0 & \lambda+1 \end{bmatrix} = (\lambda+1)^2 = 0$$

Sehingga diperoleh nilai eigen $\lambda_{1,2} = -1$

Karena kedua nilai eigen memiliki bagian real negatif, maka titik kesetimbangan $(0,0)$ bersifat stabil secara lokal.

2.8 Kriteria Routh-Hurwitz

Nilai eigen merupakan akar-akar dari persamaan karakteristik polinomial $\det(\lambda I - A)$. Namun, seringkali akar-akar persamaan karakteristik sulit ditentukan untuk model yang berdimensi lebih tinggi. Oleh karena itu diperlukan suatu kriteria yang dapat digunakan untuk mengetahui akar-akar persamaan bernilai negatif atau ada akar persamaan yang bernilai positif. Kriteria *Routh-Hurwitz* digunakan sebagai alternatif menentukan tanda bagian real dari nilai eigen matriks Jacobian. Tanda negatif dan positif dapat digunakan untuk menentukan sifat kestabilan dari suatu titik kesetimbangan.

Nilai-nilai karakteristik dari matriks A adalah akar-akar karakteristik dari polinomial karakteristik yang diperoleh dari determinan:

$$\det(\lambda I - A) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n$$

dengan $a_0 = 1$.

Untuk mengecek kestabilan sistem tanpa harus menghitung akar-akar dari polinomial tersebut, dapat digunakan kriteria kestabilan Routh-Hurwitz, yaitu metode yang memanfaatkan koefisien-koefisien a_i dari polinomial karakteristik untuk menentukan apakah semua akar (nilai karakteristik) memiliki bagian real negatif.

Tabel 2.1. Tabel Routh-Hurwitz

Variabel	Koefisien					
λ^n	a_0	a_2	a_4	a_6	$\cdots$	a_{n-1}
λ^{n-1}	a_1	a_3	a_5	a_7	$\cdots$	a_n
λ^{n-2}	b_1	b_2	b_3	b_4	$\cdots$	b_n
λ^{n-3}	c_1	c_2	c_4	c_4	$\cdots$	c_n
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$				
λ^2	d_1	d_2				
λ^1	e_1					
λ^0	f_1					

Dengan koefisien-koefisien:

$$b_1 = \frac{a_1a_2 - a_0a_3}{a_1} \qquad c_1 = \frac{b_1a_3 - a_1b_2}{b_1}$$

$$b_2 = \frac{a_1a_4 - a_0a_5}{a_1} \qquad c_2 = \frac{b_1a_5 - a_1b_3}{b_1}$$

$$b_3 = \frac{a_1a_6 - a_0a_7}{a_1} \qquad c_3 = \frac{b_1a_7 - a_1b_4}{b_1}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$b_n = \frac{a_1 a_{2n} - a_0 a_{2n+1}}{a_1} \qquad\qquad c_n = \frac{b_1 a_{2n-1} - a_1 b_n}{b_1}$$

Kriteria Routh-Hurwitz menyatakan bahwa banyaknya perubahan tanda pada kolom pertama tabel Routh-Hurwitz sama dengan banyaknya akar-akar polinomial yang memiliki bagian real positif. Jika tidak terdapat perubahan tanda pada kolom pertama (semuanya bertanda positif atau semuanya bertanda negatif), maka seluruh akar polinomial memiliki bagian real yang tidak positif, dan sistem dinyatakan stabil.

2.9 Sinopsis Tenggelamnya Kapal Van Der Wijck

Film *Tenggelamnya Kapal Van Der Wijck* (2013) merupakan adaptasi dari novel karya Buya Hamka yang disutradarai oleh Sunil Soraya. Film ini mengisahkan perjalanan cinta tragis antara Zainuddin (Herjunot Ali) dan Hayati (Pevita Pearce) yang terhalang oleh perbedaan status sosial dan adat Minangkabau yang ketat.

Zainuddin adalah seorang pemuda yatim piatu berdarah Minangkabau-Bugis yang hidup dalam keterbatasan. Ia merantau ke Batipuh, Sumatera Barat, dan di sana ia bertemu dengan Hayati, seorang gadis cantik dari keluarga terpandang. Hubungan mereka berkembang menjadi kisah cinta yang tulus meskipun status sosial Zainuddin yang rendah menjadi penghalang. Keluarga Hayati, yang sangat menjunjung tinggi adat Minangkabau, menolak lamaran Zainuddin karena ia dianggap tidak memiliki garis keturunan ibu dari Minangkabau (*matrilineal*). Penolakan tersebut memaksa Zainuddin meninggalkan Batipuh, meski Hayati berjanji akan tetap setia menunggunya.

Dalam pengembaraannya ke Batavia dan Surabaya, Zainuddin berjuang keras hingga menjadi penulis terkenal yang karya-karyanya menggambarkan kisah cinta dan penderitaan yang ia alami. Sementara itu, di bawah tekanan adat dan keluarganya, Hayati menikah dengan Aziz (Reza Rahadian), seorang pria kaya dari keluarga bangsawan. Pernikahan mereka tidak bahagia karena Aziz adalah pria egois, kasar, dan boros. Kehidupan rumah tangga Hayati semakin menderita ketika

Aziz kehilangan pekerjaannya dan hidup dalam kemiskinan.

Takdir mempertemukan Zainuddin, Hayati, dan Aziz di Surabaya. Saat itu, Zainuddin telah menjadi pria sukses dan terpandang, sementara Hayati menjalani kehidupan rumah tangga yang penuh penderitaan. Aziz, yang terpuruk, meminta bantuan Zainuddin untuk membantunya secara finansial. Karena rasa cinta yang belum padam terhadap Hayati, Zainuddin memberikan bantuan meskipun hatinya terluka. Merasa gagal sebagai suami, Aziz meninggalkan Hayati dan menyerahkan tanggung jawabnya kepada Zainuddin melalui surat perpisahan. Namun, meskipun Zainuddin masih mencintai Hayati, ia menolak menerimanya kembali karena merasa dikhianati oleh keputusan Hayati yang dulu memilih menikah dengan Aziz. Dalam keputusasaan, Hayati memutuskan untuk pulang ke kampung halamannya menaiki kapal *Van Der Wijck*.

Tragedi mencapai puncaknya ketika kapal *Van Der Wijck* mengalami kecelakaan dan tenggelam di Laut Jawa. Mendengar kabar ini, Zainuddin bergegas mencari Hayati, tetapi ia terlambat. Hayati meninggal dunia, meninggalkan luka dan penyesalan mendalam di hati Zainuddin. Meski telah meraih kesuksesan besar, kehilangan Hayati membuatnya hidup dalam kesepian yang abadi.

Film ini tidak hanya menampilkan kisah cinta yang penuh pengorbanan dan tragedi, tetapi juga menjadi kritik sosial terhadap sistem adat yang membatasi kebebasan individu dalam menentukan jalan hidupnya. Dengan latar waktu era 1930-an, film ini menggambarkan pertentangan antara cinta, adat istiadat, dan harga diri, serta menyoroti bagaimana keputusan yang diambil berdasarkan tekanan sosial dapat membawa dampak yang tak terduga dan menyakitkan (Hamka, 1984).

2.10 Penelitian Relevan

Pada penelitian (Oktavia, N., & Rosha, M., 2023) dengan judul *Model Matematika Ketergantungan Masyarakat Terhadap Media Sosial*, penelitian ini mengembangkan model matematika menggunakan pendekatan SIR (*Susceptible-Infected-Recovered*) untuk menganalisis tingkat ketergantungan masyarakat terhadap media sosial. Model ini membagi populasi menjadi individu *Susceptible* (S), *Influenced* (I), dan *Recovered* (R). Analisis kestabilan menggunakan metode Routh-Hurwitz menunjukkan bahwa tingkat interaksi dan pemulihan memengaruhi penyebaran ketergantungan. Hasil simulasi menunjukkan bahwa peningkatan laju pemulihan individu dapat menekan penyebaran ketergantungan. Dengan demikian, strategi pengendalian, seperti edukasi digital dan pembatasan penggunaan, dapat membantu mengurangi dampak negatif media sosial.

Analisis menunjukkan bahwa terdapat dua titik kesetimbangan, yaitu kesetimbangan bebas ketergantungan dan kesetimbangan endemik ketergantungan. Stabilitas sistem bergantung pada bilangan reproduksi dasar ($\boldsymbol{R_0}$), di mana nilai $\boldsymbol{R_0 > 1}$ menunjukkan bahwa ketergantungan terhadap media sosial akan menyebar luas, sementara $\boldsymbol{R_0 < 1}$ menunjukkan bahwa ketergantungan dapat dikendalikan. Berdasarkan hasil simulasi, peningkatan jumlah individu yang berhasil mengurangi penggunaan media sosial secara signifikan dapat menekan angka ketergantungan dalam populasi. Pendekatan pemodelan SIR dalam penelitian ini dapat digunakan untuk merepresentasikan dinamika perubahan perasaan dalam hubungan cinta, seperti bagaimana emosi berkembang dari ketertarikan awal (rentan), menjadi cinta yang mendalam (terinfeksi), hingga akhirnya melupakan atau menerima keadaan (pulih).

Selanjutnya pada penelitian (Adriana, T., 2013) memodelkan dinamika cinta antara Pangeran Charles dan Puteri Diana menggunakan sistem persamaan diferensial yang merupakan pengembangan dari model Romeo-Juliet. Model ini melibatkan empat individu dengan saling keterkaitan emosional, termasuk pihak ketiga, yaitu Camilla dan Hewitt. Analisis mencakup penentuan titik kesetimbangan, syarat kestabilan, serta simulasi numerik terhadap beberapa skenario hubungan. Hasil penelitian menunjukkan bahwa intensitas cinta antara Charles dan Diana tetap lebih dominan dibandingkan hubungan mereka dengan pihak ketiga, serta perasaan cinta Diana terhadap Charles cenderung lebih kuat. Penelitian ini menunjukkan bahwa fenomena emosional dalam hubungan antarmanusia dapat direpresentasikan secara matematis dan dianalisis kestabilannya.

Lebih lanjut pada penelitian (Winarti, S., 2023) dengan judul *Adat Sebagai Faktor Utama yang Menghalangi Cinta dalam Novel Tenggelamnya Kapal Van Der Wijck*, Penelitian ini menganalisis novel *Tenggelamnya Kapal Van Der Wijck* dari perspektif sosiologi sastra, dengan fokus pada pengaruh adat Minangkabau sebagai faktor utama yang menghalangi cinta antara Zainuddin dan Hayati. Menggunakan metode kualitatif deskriptif, penelitian ini menemukan bahwa sistem adat Minangkabau yang bersifat matrilineal menyebabkan Zainuddin dianggap sebagai "anak pisang" dan bukan bagian dari masyarakat Minang, sehingga tidak diizinkan menikahi Hayati. Adat yang begitu kuat dalam novel ini digambarkan sebagai hambatan besar yang tidak hanya memisahkan dua tokoh utama, tetapi juga menyebabkan penderitaan mendalam bagi keduanya.

Penelitian ini relevan dengan studi pemodelan matematika dinamika cinta Zainuddin dan Hayati karena menunjukkan adanya faktor sosial yang memengaruhi perkembangan hubungan mereka. Dalam pendekatan matematis, pengaruh adat dapat direpresentasikan sebagai variabel eksternal yang turut menentukan perubahan emosi dan keputusan kedua tokoh dalam hubungan mereka.

BAB V

PENUTUP

Berdasarkan hasil dan pembahasan pada bab sebelumnya, diperoleh kesimpulan dan saran sebagai berikut.

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil pembahasan yang telah dilakukan, diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

1. Model Matematika Dinamika Cinta Zainuddin dan Hayati dalam Film *Tenggelamnya Kapal Van Der Wijck*

$$\alpha + \gamma H_Z - \beta P_Z Z_H - \mu Z_H = 0$$

$$\theta + \varepsilon P_Z + \beta P_Z Z_H - \gamma H_Z - \mu H_Z - \delta H_Z = 0$$

$$\omega + \delta H_Z - \mu A_H = 0$$

$$\sigma - \varepsilon P_Z - \pi P_Z = 0$$

2. Dari sistem persamaan differensial diperoleh dua titik kesetimbangan, yaitu titik kesetimbangan dengan perjuangan dan tanpa perjuangan yang stabil asimtotik. Titik kesetimbangan dengan perjuangan $E_1 = (Z_H{}^*, H_Z{}^*, A_H{}^*, P_Z{}^*)$ dengan

$$Z_H{}^* = \frac{\alpha\big((\gamma + \mu + \delta)(\beta P_Z + \mu) - \beta P_Z\,\gamma\big) + \gamma(\theta(\beta P_Z + \mu) + \varepsilon P_Z(\beta P_Z + \mu) + \beta P_Z \alpha)}{\big((\gamma + \mu + \delta)(\beta P_Z + \mu) - \beta P_Z\,\gamma\big)\,\big(\beta\sigma + \mu(\varepsilon + \pi)\big)}$$

$$H_Z{}^* = \frac{\theta(\beta P_Z + \mu) + \varepsilon P_Z(\beta P_Z + \mu) + \beta P_Z \alpha}{(\gamma + \mu + \delta)(\beta P_Z + \mu) - \beta P_Z\,\gamma}$$

$$A_H{}^* = \frac{\omega\big((\gamma + \mu + \delta)(\beta P_Z + \mu) - \beta P_Z\,\gamma\big) + \delta(\theta(\beta P_Z + \mu) + \varepsilon P_Z(\beta P_Z + \mu) + \beta P_Z \alpha)}{\mu((\gamma + \mu + \delta)(\beta P_Z + \mu) - \beta P_Z\,\gamma)}$$

$$P_Z{}^* = \frac{\sigma}{\varepsilon + \pi}$$

Sedangkan untuk titik kesetimbangan tanpa perjuangan $E_1 = (\,Z_H{}^{**}, H_Z{}^{**}, A_H{}^{**}, P_Z{}^{**})$ dengan

$$Z_H{}^{**} = \frac{\theta}{\gamma + \mu + \delta}$$

$$H_Z{}^{**} = \frac{\alpha(\gamma + \mu + \delta) + \gamma\theta}{\mu(\gamma + \mu + \delta)}$$

$$A_H{}^{**} = \frac{\omega(\gamma + \mu + \delta) + \delta\theta}{\mu(\gamma + \mu + \delta)}$$

$$P_Z{}^{**} = 0$$

3. Dengan nilai-nilai parameter yang diambil berdasarkan asumsi sesuai alur cerita dalam film *Tenggelamnya Kapal Van Der Wijck*. Hasil menunjukkan bahwa cinta Hayati terhadap Zainuddin berbanding lurus dengan besarnya perjuangan yang dilakukan Zainuddin. Semakin besar perjuangan Zainuddin untuk Hayati, semakin besar pula cinta Hayati terhadapnya, dan sebaliknya. Selain itu, seiring berjalannya waktu, perubahan intensitas cinta di antara keduanya bergantung pada konsistensi perjuangan yang dilakukan.

5.2 Saran

Berdasarkan hasil analisis model matematika dinamika cinta Zainuddin dan Hayati dalam film *Tenggelamnya Kapal Van Der Wijck*, disarankan untuk mengembangkan model yang lebih kompleks dengan mempertimbangkan interaksi variabel tambahan, seperti pengaruh orang ketiga $(\boldsymbol{A_H})$ secara lebih mendetail dan bagaimana ketertarikan awal $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\omega})$ memengaruhi dinamika hubungan dalam jangka panjang. Penerapan model ini pada hubungan interpersonal lain atau dinamika sosial yang lebih luas juga dapat memberikan wawasan baru mengenai bagaimana faktor internal dan eksternal memengaruhi perkembangan emosi dari waktu ke waktu.