SKRIPSI

MODEL MATEMATIKA PENYEBARAN PENYAKIT HEPATITIS NON HEP A-E AKUT DENGAN TRANSMISI TAK LANGSUNG DAN PENGGUNAAN MASKER

NURJAYANTI
E0121008

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS SULAWESI BARAT
TAHUN 2025

SURAT PERNYATAAN

Yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: Nurjayanti
Tempat /Tg.Lahir	: Tatibajo, 10 April 2002
NIM	: E0121008
Program Studi	: Matematika (S1)

menyatakan bahwa tugas akhir dengan judul "Model Penyebaran Penyakit Hepatitis Hep A-E Akut dengan Transmisi Tak Langsung dan Penggunaan Masker" disusun berdasarkan prosedur ilmiah yang telah melalui pembimbing dan bukan merupakan plagiat dari karya ilmiah/naskah lain. Apabila dikemudian hari terbukti bahwa pernyataan ini tidak benar, maka bersedia menerima sanksi sesuai peraturan berlaku.

Majene, 26 September 2024

Nurjayanti

HALAMAN PENGESAHAN

Skripsi ini diajukan oleh:

Nama	:	Nurjayanti
NIM	:	E0121008
Judul	:	Model Penyebaran Penyakit Hepatitis Non Hep A-E denganTransmisi Tak Langsung dan Penggunaan Masker.

Telah berhasil di pertanggung jawabkan di hadapan Tim Penguji (SK Nomor 101/UN55.7/HK.04/2024) dan diterima sebagai bagian persyaratan memperoleh gelar Sarjana S1 Matematika pada Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Sulawesi Barat.

Disahkan oleh:

Dekan FMIPA
Universitas Sulawesi Barat

Musafira, S.Si., M.Sc
NIP. 197709112006042002

Tim Penguji:

Ketua Penguji	:	Musafira, S.Si., M.Sc	(..................)
Sekretaris	:	Fardinah, S.Si., M.Sc	(..................)
Pembimbing 1	:	Dr. Wahyudin Nur, S.Si., M.Si	(..................)
Pembimbing 2	:	Meryta Febrilian F, S.Si., M.Sc	(..................)
Penguji 1	:	Fardinah, S.Si., M.Sc	(..................)
Penguji 2	:	Darmawati, S.Si., M.Si	(..................)
Penguji 3	:	Muh Rifandi, S.Si., M.Si	(..................)

ABSTRAK

Hepatitis non hep A-E akut merupakan suatu proses peradangan yang terjadi pada jaringan sel hati dan tergolong penyakit menular, dan menjadi penyakit baru yang menyerang anak-anak. Oleh karena itu perlu dilakukan pencegahan dan penanggulangan penyebarannya. Tujuan penelitian ini adalah untuk mengkaji model penyebaran penyakit hepatitis non hep A-E akut dengan mempertimbangkan transmisi tak langsung melalui objek yang terkontaminasi *adenovirus* di lingkungan dan penggunaan masker pada individu yang infeksius serta dilakukan pengobatan. Model yang dikontruksi dinyatakan sebagai sistem persamaan diferensial biasa berorde satu. Analisis dinamik yang dilakukan pada model meliputi penentuan titik kesetimbangan, bilangan reproduksi dasar, syarat eksistensi titik kesetimbangan, dan analisis kestabilan lokal. Hasil analisis menunjukkan terdapat dua titik kesetimbangan,yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit, dan titik kesetimbangan endemik yang eksis bersyarat. Titik kesetimbangan bebas penyakit stabil asimtotik lokal jika memenuhi kriteria Routh-Hurwitz dan $R_0 < 1$, sedangkan titik kesetimbangan endemik stabil asimtotik jika memenuhi kriteria Routh-Hurwitz. Hasil simulasi numerik menunjukkan bahwa semakin besar penggunaan masker pada individu infeksius dan laju kesembuhan karena pengobatan dapat memperkecil R_0 yang berarti bahwa penyakit akan menghilang dari populasi seiring berjalannya waktu. Hasil simulasi numerik juga menunjukkan bahwa mengombinasikan kedua intervensi yaitu penggunaan masker dan pengobatan lebih efektif dalam menekan R_0 dibandingkan dengan menerapkan salah satu intervensi.

Kata Kunci: Hepatitis non hep A-E akut, analisis kestabilan, penggunaan masker, pengobatan.

ABSTRACT

Acute non-hepA-E hepatitis is an inflammatory process that occurs in liver cell tissue and is classified as an infectious disease, and is a new disease that attacks children. Therefore, it is necessary to prevent and control its spread. The purpose of this study was to examine the model of the spread of acute non-hepA-E hepatitis by considering indirect transmission through objects contaminated with adenovirus in the environment and the use of masks in infectious individuals and treatment. The constructed model is expressed as a system of first-order ordinary differential equations. Dynamic analysis carried out on the model includes determining the equilibrium point, basic reproduction number, conditions for the existence of the equilibrium point, and local stability analysis. The results of the analysis show that there are two equilibrium points, namely the disease-free equilibrium point and the conditionally existing endemic equilibrium point. The disease-free equilibrium point is locally asymptotically stable if it meets the Routh-Hurwitz criteria and the basic reproduction number is less than one, while the endemic equilibrium point is asymptotically stable if it meets the Routh-Hurwitz criteria. The results of the numerical simulation show that the greater the use of masks in infectious individuals and the rate of recovery due to treatment can be reduced, which means that the disease will disappear from the population over time. The results of the numerical simulation also show that combining both interventions, namely the use of masks and treatment, is more effective in suppressing the basic reproduction number compared to implementing one intervention alone.

***Keywords**: acute Hepatitis non hepA-E, stability analysis, mask use, treatment.*

BAB I
PENDAHULUAN

Pada bab ini dibahas tentang latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, dan manfaat penelitian yang dilakukan.

1.1 Latar Belakang

Hepatitis merupakan suatu proses peradangan yang terjadi pada jaringan sel hati yang tergolong penyakit menular. Hepatitis itu sendiri memiliki berbagai jenis, yaitu hepatitis A, hepatitis B, hepatitis C, hepatitis D, dan hepatitis E. Hepatitis akut non hep A-E menjadi wabah penyakit hepatitis baru yang menyerang anak-anak di sejumlah negara. Penyakit tersebut berdasarkan pemeriksanaan laboratorium terbukti tidak disebabkan oleh virus hepatitis tipe A, B, C, D, maupun E. Hal tersebut yang membuat penggunaan istilah "hepatitis non hep A-E akut" untuk menggambarkan kondisi penyakit ini. Beberapa kasus dari hepatitis non hep A-E akut pada anak-anak, *World Health Organization* (WHO) menerima laporan 650 dari 33 negara di lima wilayah, sebanyak 38 anak-anak memerlukan transplantasi hati. Inggris Raya (UK) adalah negara yang paling banyak terserang penyakit ini, telah dilaporkan sejak Oktober 2021. Pada 5 April 2022, Badan Kesehatan Dunia telah menerima laporan mengenai 10 kasus hepatitis akut non hep A-E dari Inggris Raya pada anak-anak berusia 11 bulan hingga 5 tahun (Sallam et al., 2022).

Indonesia pertama kali melihat kasus penyakit ini pada akhir April 2022 dengan meninggalnya 3 pasien anak dari hepatitis akut yang tidak diketahui penyebab nya di RSUPN Dr. Ciptomangunkusumo Jakarta dalam kurun waktu yang berbeda dengan rentang dua minggu terakhir hingga tanggal 30 April 2022. Kemudian pada tanggal 23 Mei 2022, Kemenkes RI menyatakan bahwa terdapat peningkatan kasus menjadi 35 kasus dengan dugaan hepatitis akut non hep A-E di Indonesia yang tersebar di 10 provinsi diantaranya DKI Jakarta, Jawa Timur, Bali, NTB, Bangka Belitung, Jambi, Sumatera Barat, Banten, DIY, dan Sulawesi Selatan. *World Health Organization* (WHO) secara resmi menyatakan bahwa penyakit hepatitis akut non hepA-E ditetapkan menjadi Kejadian Luar Biasa (KLB).

Berdasarkan kasus yang telah dilaporkan, penyakit hepatitis akut non hep A-E terjadi pada anak-anak berusia 1 bulan hingga 16 tahun (Kemenkes RI, 2022).

Penyebab kasus hepatitis akut non hep A-E terdapat beberapa kemungkinan etiologi dari penyakit hepatitis akut non hep A-E yang telah diajukan, yaitu infeksi *adenovirus*, SARS-CoV-2, vaksinasi COVID-19, agen toksik, dan agen infeksi baru (Frediansyah et al., 2022). Sementara itu, hipotesis utama penyebab penyakit hepatitis akut non hep A-E ialah *adenovirus*. *Adenovirus* tetap menjadi *patogen* potensial yang paling sering terdeteksi pada penyakit ini. (UKHSA, 2022). Infeksi *adenovirus* di lingkungan sendiri menular melalui kontak langsung dengan individu yang terinfeksi melalui *droplet* (cairan atau cipratan liur yang dikeluarkan dari hidung), *fecal-oral* (mengonsumsi makanan maupun minuman yang terkontaminasi virus), dan *inokulasi konjungtiva* atau secara tidak langsung melalui paparan benda yang terkontaminasi virus. Gejala awal individu dengan hepatitis non hep A-E akut umumnya mengalami gejala yang sama seperti penyakit hepatitis yaitu sakit perut, diare, mual, dan muntah (Kemenkes RI, 2022).

Pencegahan penyakit hepatitis akut non hep A-E dilakukan oleh Kementerian Kesehatan RI berbagai upaya mitigasi sebagai langkah antisipasi meluasnya penyakit hepatitis akut non hep A-E di Indonesia. Langkah utama yang dilakukan oleh Kemenkes RI ialah mengumpulkan informasi global terkait hepatitis non hep A-E akut secara tepat dan cepat. Langkah kedua yang dilakukan ialah dengan meningkatkan kewaspadaan publik yaitu kemenkes RI mengeluarkan surat edaran nomor: HK.02.02/C/2515/2022 tentang kewaspadaan terhadap penemuan kasus hepatitis akut yang tidak diketahui etiologinya (*Acute Hepatitis of Unknown Aetiology*), dan melakukan analisis *patogen* menggunakan teknologi *Whole Genome Sequencing* (WGS) untuk melihat varian virus yang muncul (Quenela, Mutiara, Cantika, 2022).

Penyebaran hepatitis non hep A-E akut menginfeksi anak yang berusia 1 sampai 16 tahun. Kasus-kasus berdasarkan definisi *World Health Organization* (WHO) bergantung pada persentase di antara individu-individu yang pernah melakukan kontak dekat dengan kasus hepatitis akut non hep A-E dengan kadar serum *transaminase* SGOT/SPGT lebih dari 500 IU/L, yang berusia kurang dari 16 tahun. Penyebaran penyakit menular dapat dimodelkan secara matematis dengan tujuan memprediksi penularan penyakit dan menentukan tindakan yang efektif.

Berdasarkan latar belakang diatas, penulis tertarik untuk mengkaji dan memodifikasi model yang telah dibangun oleh beberapa peneliti sebelumnya. Peneliti sebelumnya membangun model matematika dengan kompartemen *SEIR* yang menggambarkan sifat laten dari penyakit, dan mengasumsikan bahwa individu rentan yang terpapar oleh *patogen* penyebab penyakit hepatitis non hep A-E akut akan menjadi terinfeksi setelah sekian waktu, selain itu individu terpapar dan individu infeksius memiliki peluang yang berbeda untuk menularkan penyakitnya kepada individu yang sehat, serta menggunakan intervensi pengobatan sebagai upanya pencengahan penyebaran penyakit, sehingga berdasarkan penelitian sebelumnya maka penelitian ini kemudian menganalisis upaya pencegahan penyebaran penyakit hepatitis non hep A-E akut dengan model *SEIVR* dengan mengasumsikan bahwa individu yang rentan dapat terpapar penyakit karena berinteraksi dengan individu infeksius dan objek yang terkontaminasi *adenovirus* di lingkungan, dan menggunakan intervensi penggunaan masker pada individu infeksius dan laju kesembuhan karena pengobatan . Hal ini memungkinkan untuk memahami dan mengetahui bagaimana pencegahan yang bisa dilakukan untuk meminimalisir penyebaran penyakit hepatitis non hep A-E akut.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah dijelaskan diatas, maka diperoleh rumusan masalah sebagai berikut:

1. Bagaimana model matematika penyebaran penyakit hepatitis non hep A-E akut dengan transmisi tak langsung dan penggunaan masker?
2. Bagaimana analisis dinamik model penyebaran penyakit hepatitis non hep A-E akut dengan transmisi tak langsung dan penggunaan masker?
3. Bagaimana hasil simulasi numerik dan interpretasi model penyebaran penyakit hepatitis non hep A-E akut dengan transmisi tak langsung dan penggunaan masker?

1.3. Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah diatas, maka tujuan penelitian yang ingin dicapai dalam penulisan ini adalah sebagai berikut:

1. Mengontruksi model matematika penularan penyakit hepatitis non hep A-E akut dengan transmisi tak langsung dan penggunaan masker.
2. Melakukan analisis dinamik model penyebaran penyakit hepatitis non hep A-E akut dengan transmisi tak langsung dan penggunaan masker.
3. Melakukan simulasi numerik model penyebaran penyakit hepatitis non hep A-E akut dengan transmisi tak langsung dan penggunaan masker.

1.4. Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Memberikan informasi tentang pengaruh penggunaan masker terhadap penularan penyakit hepatitis non hep A-E akut.
2. Mengembangkan model penyebaran penyakit hepatitis non hep A-E akut dengan transmisi tak langsung yang dapat membantu dalam merumuskan kebijakan pengendalian penyakit yang efektif.
3. Berkontribusi terhadap pengembangan ilmu pengetahuan di bidang kesehatan anak.

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini akan dibahas tentang pemodelan matematika, persamaan dan sistem diferensial, nilai eigen dan vektor eigen, linearisasi, matriks Jacobian, kriteria Routh-Hurwitz, analisis kestabilan titik kesetimbangan, bilangan reproduksi dasar, serta penyakit hepatitis non hep A-E Akut yang digunakan untuk membantu memahami persoalan yang dibahas dalam tugas Akhir ini.

2.1 Pemodelan Matematika

Pemodelan matematika merupakan bidang matematika yang burusaha untuk merepresentasikan dan menjelaskan sistem-sistem fisik atau masalah pada dunia nyata dalam pernyataan matematik, sehingga diperoleh pemahaman dari masalah dunia nyata ini menjadi lebih tepat. Representasi matematika yang digunakan dari proses ini dikenal dengan “Model matematika”. Konstruksi model, analisis dan penggunaan model matematika dipandang sebagai salah satu aplikasi matematika yang paling penting (Afifah, 2011).

Ada dua tipe model matematika, yaitu model bertipe deterministik dan model bertipe empirik. Model deterministik suatu model matematika yang dibangun dengan berlandaskan hukum-hukum atau sifat-sifat yang berlaku pada sistem, sedangkan model empirik adalah ilmu yang berlandaskan observasi dan hasilnya tidak bersifat spekulatif (Jusrawati, 2018).

Menurut (Pagalay, U, 2009) dalam pembuatan model memerlukan beberapa langkah untuk membuat model yang reliabel. Secara umum, langkah-langkah yang dilakukan sebagai berikut:

1. Identifikasi masalah

   Langkah ini bertujuan untuk mengidentifikasi masalah dilakukan untuk memahami masalah yang akan dirumuskan. Identifikasi yang tepat memastikan fokus model sesuai dengan tujuan penelitian dan kebutuhan yang diinginkan atau diharapkan.

2. Membangun asumsi-asumsi

   Hal ini diperlukan karena model adalah penyederhaan realitas yang kompleks. Kompleksitas permasalahan dapat disederhankan dengan mengasumsikan hubungan sederhana variabel.

3. Membuat kontruksi model

   Membuat kontruksi model dapat dilakukan baik melalui hubungan fungsional dengan cara membuat diagram alur, persamaan-persamaan metematika, analisis model dan dengan bantuan *softwarwe.*

4. Menganalisis model

   Tahap ini bertujuan untuk memperoleh solusi yang sesuai untuk menjawab pertanyaan yang dibangun pada tahap identifikasi. Didalam pemodelan analisis dapat dilakukan dengan dua cara, yaitu dengan melakukan optimasi dan simualsi. Optimasi dirancang untuk mencari solusi atas apa yang seharusnya terjadi dan sedangkan simulasi dirancang untuk mencari solusi apa yang akan terjadi.

5. Interpretasi

   Tujuan interpretasi setelah melakukan analisis yaitu untuk menilai apakah hasil model rasional atau tidak, dapat diterima, dapat membantu memahami keterkaitan antara variabel dan dampaknya.

6. Validasi

   Sebelum menggunakan model untuk menyimpulkan kejadian dunia nyata, model tersebut harus diuji. Model yang valid tidak hanya mengikuti kaidah-kaidah teoritis yang sah tetapi juga dapat memberikan interpretasi atas hasil yang diperoleh mendekati kesesuiaan. Jika sebagian besar standar verifikasi tersebut dapat dilalui, model dapat diimplementasikan, sebaikanya jika tidak, maka konstruksi model harus disusun ulang.

7. Implementasi

   Setelah hasil validasi memenuhi syarat dan rasional maka hasilnya dapat diterima, kemudian dapat dilakukan implementasi dari model yang telah diperoleh.

2.2 Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Nilai eigen digunakan untuk mengetahui kestabilan dari suatu sistem persamaan diferensial. Berikut definisi dari nilai eigen dan vekror eigen.

Definisi 2.2.1 (Yulianti, 2016)

Misalkan A adalah matriks berukuran $n \times n$, vektor tak nol $\vec{X}$ didalam $\mathbb{R}^n$ dinamakan vektor eigen (*eigenvector*) dari A jika $A\vec{X}$ adalah kelipatan skalar $\vec{X}$ yaitu $A\vec{X} = \lambda \vec{X}$ untuk suatu skalar λ. Skalar λ dinamakan nilai eigen dari A dari $\vec{X}$ dikatakan vektor eigen yang bersesuian dengan λ.

Untuk mencari nilai-nilai eigen matriks A yang berukuran $n \times n$, maka dapat dituliskan kembali $A\vec{X} = \lambda \vec{X}$ sebagai

$$\begin{aligned} A\vec{X} &= \lambda \vec{X} \\ A\vec{X} &= \lambda I \vec{X} \\ (\lambda I - A)\vec{X} &= 0 \end{aligned} \tag{2.1}$$

dengan I adalah matriks indentitas. Agar λ menjadi nilai eigen , maka haruslah ada solusi tak nol dari persamaan (2.1).

Teorema 2.2.1 (Anton, H., 2010)

Jika A adalah matriks berukuran $n \times n$ dengan entri-entri bilangan real, maka λ adalah nilai eigen dari A jika dan hanya jika memenuhi persamaan

$$|\lambda I - A| = 0 \tag{2.2}$$

yang disebut persamaan karakteristik dari A.

Contoh 2.2.1

Diberikan matriks $A=\begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Tentukan nilai eigen dan vektor eigen matriks *A*!

Penyelesaian:

Menentukan nilai eigen dari matriks *A*

$$|\lambda I - A| = 0$$

$$\left| \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\left| \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda-4 & 0 & -1 \\ 2 & \lambda-1 & 0 \\ 2 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} = 0$$

Dengan menggunakan metode sarrus diperoleh:

$$\begin{vmatrix} \lambda-4 & 0 & -1 \\ 2 & \lambda-1 & 0 \\ 2 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \lambda-4 & 0 \\ 2 & \lambda-1 \\ 2 & 0 \end{matrix} = 0$$

$$\left(\left((\lambda-4)(\lambda-1)(\lambda-1)\right)+0+0\right)-\left((-2\lambda+2)+0+0\right)=0$$

$$(\lambda-4)(\lambda-1)(\lambda-1)+2(\lambda-1)=0$$

$$(\lambda-1)\left((\lambda-4)(\lambda-1)+2\right)=0$$

$$(\lambda-1)\left(\lambda^2-5\lambda+4+2\right)=0$$

$$(\lambda-1)\left(\lambda^2-5\lambda+6\right)=0$$

$$(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)=0$$

Diperoleh nilai eigen dari matriks *A* yaitu $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2,$ dan $\lambda_3 = 3.$

Selanjutnya menentukan vektor eigen

Untuk $\lambda_1 = 1$, maka

$$(\lambda I - A)\vec{X} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1-4 & 0 & -1 \\ 2 & 1-1 & 0 \\ 2 & 0 & 1-1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -3 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Akibatnya,

$-3x_1 - x_3 = 0$ dan $2x_1 = 0$

Sehingga

$$x_1 = 0$$

dan

$$\begin{aligned} -3(0) - x_3 &= 0 \\ x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Misalkan

$$x_2 = t$$

sehingga, diperoleh salah satu vektor eigen sebagai berikut:

$$\vec{k}_1 = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} t, t \in \mathbb{R} \right\}$$

Jadi untuk $\lambda_1 = 1$, maka salah satu vektor eigennya adalah $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Untuk $\lambda_2 = 2$, maka

$$(\lambda I - A)\vec{X} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 2-4 & 0 & -1 \\ 2 & 2-1 & 0 \\ 2 & 0 & 2-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Akibatnya,

$$-2x_1 - x_3 = 0$$
$$-2x_1 = x_3$$

dan

$$2x_1 + x_2 = 0$$
$$2x_1 = -x_2$$
$$x_2 = -2x_1$$

dan

$$2x_1 + x_3 = 0$$
$$2x_1 = -x_3$$
$$x_3 = -2x_1$$

Misalkan

$$x_1 = t$$
$$x_2 = -2t$$
$$x_3 = -2t$$

Sehingga, diperoleh salah satu vektor eigen sebagai berikut:

$$\vec{k}_2 = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ -2t \\ -2t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} t, t \in \mathbb{R} \right\}$$

Jadi untuk $\lambda_2 = 2$, maka salah satu vektor eigennya adalah $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$.

Untuk $\lambda_2 = 3$, maka

$$(\lambda I - A)\vec{X} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 3-4 & 0 & -1 \\ 2 & 3-1 & 0 \\ 2 & 0 & 3-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Akibatya,

$$-x_1 - x_3 = 0$$
$$-x_1 = x_3$$

$$2x_1 + 2x_2 = 0$$
$$x_1 = -x_2$$
$$x_2 = -x_1$$

Misalkan

$$x_1 = t$$
$$x_2 = -t$$
$$x_3 = -t$$

Sehingga, diperoleh salah satu vektor eigen sebagai berikut:

$$\vec{k}_3 = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ -t \\ -t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} t, t \in \mathbb{R} \right\}$$

Jadi untuk $\lambda_3 = 3$, maka salah satu vektor eigennya adalah $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

2.3 Persamaan Diferensial

Adapun definisi dari persamaan diferensial yaitu sebagai berikut:

Definisi 2.3.1 (Syamsuddin, T, 2013)

Persamaan diferensial adalah persaman yang melibatkan turunan satu atau lebih varibel tak bebas terhadap satu atau lebih variabel bebas.

Berdasarkan banyaknya variabel bebas yang terlibat, persamaan diferensial diklasifikasikan menjadi dua, yaitu persamaan diferensial biasa dan persamaan diferensial parsial.

Definisi 2.3.2 (Syamsuddin, T, 2013)

Persamaan diferensial biasa adalah suatu persamaan diferensial yang melibatkan turunan dari satu atau lebih variabel tak bebas terhadap satu variabel bebas.

Berdasarkan sifat kelinearannya, persamaan diferensial biasa dibedakan menjadi persamaan diferensial biasa linear dan persamaan diferensial biasa non linear.

Adapun bentuk umum persamaan diferensial biasa linear yaitu:

$$a_n(t)\frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1}(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \ldots + a_2(t)\frac{d^2 x}{d^2 t} + a_1(t)\frac{dx}{dt} + a_0(t)x = f(t) \tag{2.3}$$

dengan $a_n \neq 0, a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ disebut koefisien persamaan diferensial.

Jika $f(t)$ bernilai nol untuk semua nilai *t* dalam interval yang ditinjau, maka persamaan ini dikatakan homogen, sebaliknya dikatakan nonhomogen.

Contoh 2.3.1

$$\frac{dx}{dt}+\frac{2x}{t}=15t^2$$

Penyelesaian:

$$a_0(t)=\frac{2}{t}\text{dan } f(t)=15t^2$$

Faktor integritas:

$$g(t)=e^{\int a_0(t)dt}=e^{\int \frac{2}{t}dt}=e^{2\ln(t)}=e^{\ln(t)^2}=t^2$$

Kalikan $f(t)=15t^2$ dengan $g(t)=t^2$ dan diitegralkan, sehingga diperoleh

$$g(t)x(t)=\int g(t)\,f(t)dt=\int t^2 15t^2 dt=\int 15t^4 dt=\frac{15}{5}t^5+c=3t^5+c$$

Jadi, solusi umumnya adalah

$$t^2x(t)=3t^5+c$$
$$x(t)=\frac{(3t^5+c)}{t^2}$$
$$x(t)=3t^3+ct^{-2}$$

Definisi 2.3.3 (Saputri, R, 2017)
Persamaan diferensial parsial adalah suatu persamaan diferensial yang melibatkan turunan dari satu atau lebih variabel tak bebas terhadap lebih dari satu variabel bebas.

Definisi 2.3.4 (Evans C. Lawrence , 2022)
Sebuah vektor dengan bentuk $\vec{\alpha}=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$, dimana setiap komponen α_i, $i=1,\ldots,n$ adalah sebuah bilangan bulat non-negatif, disebut sebuah multi indeks dengan orde

$$|\alpha|=\alpha_1+\ldots+\alpha_n.$$

Diberikan sebuah multi indeks α dan fungsi $u : U \to \mathbb{R}$ dengan $U \subset \mathbb{R}^n$, didefinisikan

$$D^\alpha u(x) := \frac{\partial^{|\alpha|} u(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} = \partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n} u.$$

Jika *k* adalah sebuah bilangan bulat non-negatif,

$$D^k u(x) := \{ D^\alpha u(x) \| \alpha | = k \}$$

adalah himpunan semua turunan parsial orde *k* dari *u.* Dengan memberikan beberapa urutan pada berbagai turunan parsial, $D^k u$ dapat dipandang sebagai titik di $\mathbb{R}^{n^k}$, selanjutnya dapat ditulis dengan $\vec{D}^k u$.

Definisi 2.3.5(Evans C.Lawrence C., 2022)

Diberikan fungsi $F : \mathbb{R}^{n^k} \times \mathbb{R}^{n^{k-1}} \times \ldots \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times U \to \mathbb{R}$ dengan $U \subset \mathbb{R}^n$.

Sebuah ekspresi dari bentuk

$$F\left(\vec{D}^k u(x), \vec{\mathrm{D}}^{k-1} \mathrm{u}(x), \ldots, \vec{D} u(x), u(x), x\right) = 0 \text{ dengan } x \in U \qquad (2.4)$$

disebut persamaan diferensial parsial orde k dengan $k \in \mathbb{Z}^+$.

Contoh 2.3.2

a. Contoh persamaan diferensial parsial dengan $u : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, dan

$$\vec{D}^1 u(x) = F\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \frac{\partial u}{\partial x_3}\right) \in \mathbb{R}^3 :$$

$$F\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \frac{\partial u}{\partial x_3}, u, x_1, x_2, x_3\right) = \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial u}{\partial x_3} + x_3 = 0$$

b) Contoh persamaan diferensial parsial dengan $u : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$\vec{D}^2 u(x) = F\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1}\right) \in \mathbb{R}^4, \text{ dan}$$

$$\vec{D}^1 u(x) = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}\right) \in \mathbb{R}^2 :$$

$$F\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1{}^2},\frac{\partial^2 u}{\partial x_2{}^2},\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2},\frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1},\frac{\partial u}{\partial x_1},\frac{\partial u}{\partial x_2},u,x_1,x_2\right)=\frac{\partial^2 \mu}{\partial x_1{}^2}+\frac{\partial^2 \mu}{\partial x_2{}^2}+u+x_2=0$$

Berdasarkan Definisi 2.3.3, maka contoh 2.3.2 (a) dan 2.3.2 (b) merupakan persamaan diferensial parsial karena melibatkan dua variabel bebas.

2.4 Sistem persamaan Diferensial

Secara umum suatu sistem persamaan diferensial orde pertama berdimensi *n* mempunyai bentuk sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt}&=f_1\left(t,x_1,x_2,\ldots,x_n\right)\\ \frac{dx_2}{dt}&=f_2\left(t,x_1,x_2,\ldots,x_n\right)\\ &\vdots\\ \frac{dx_n}{dt}&=f_n\left(t,x_1,x_2,\ldots,x_n\right)\end{aligned} \tag{2.5}$$

dengan $x_1, x_2, \ldots, x_n$ adalah variabel bebas dan t adalah variabel terikat, sehingga $x_1 = x_1\left(t\right), x_2\left(t\right), \ldots, x_n = x_n\left(t\right)$, dimana $\frac{dx_n}{dt}$ merupakan derivatif fungsi x_n terhadap t , dan f_n adalah fungsi yang bergantung pada variabel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dan t (Kaya,K., et al, 2021).

Sistem persamaan diferensial berdimensi *n* adalah gabungan dari *n* buah persamaan diferensial dengan *n* buah fungsi tak diketahui. Dalam hal ini, *n* merupakan bilangan bulat positif lebih besar sama dengan dua. Sistem persamaan diferensial juga dibedakan menjadi sistem persamaan diferensial linear dan sistem persamaan diferensial tak linear (Julia, I, 2015).

2.4.1 Sistem Persamaan Diferensial Linear

Secara umum suatu sistem persamaan diferensial linear sebagai berilkut:

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2,\ldots,a_{1n}(t)x_n + f_1(t)\\
\frac{dx_2}{dt} &= a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2,\ldots,a_{2n}(t)x_n + f_2(t)\\
&\vdots\\
\frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2,\ldots,a_{nn}(t)x_n + f_n(t)
\end{aligned} \tag{2.6}$$

dengan $x_1 = x_1(t), x_2 = x_2(t),\ldots,x_n = x_n(t)$.

Sistem persamaan diferensial linear berdimensi dua, berbentuk:

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + f_1(t)\\
\frac{dx_2}{dt} &= a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + f_2(t)
\end{aligned} \tag{2.7}$$

dimana fungsi f_1 dan f_2 merupakan fungsi *t* yang kontinu pada suatu selang *I,* sedangkan x_1 dan x_2 adalah fungsi *t* yang tak diketahui (Julia, I., 2015).

Contoh 2.4.1

Tentukan solusi sistem persamaan diferensial linear berikut!

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= 4x_1 + x_3\\
\frac{dx_2}{dt} &= -2x_1 + x_2\\
\frac{dx_3}{dt} &= -2x_1 + x_3
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Penyelesaian:

Nyatakan sistem (2.8) dalam bentuk notasi matriks dan vektor, yaitu

$$\frac{d\vec{X}}{dt} = A\vec{X}$$

degan $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ dan $\vec{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

Berdasarkan contoh 2.2.1 diperoleh nilai eigen matriks A dan vektor eigen yang bersesuaian dengan masing-masing nilai eigen sebagai berikut:

Untuk $\lambda_1 = 1$, maka salah satu vektor eigen adalah $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Untuk $\lambda_2 = 2$, maka salah satu vektor eigen adalah $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$.

Untuk $\lambda_3 = 3$ maka salah satu vektor eigen adalah $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Maka diperoleh solusi sistem (2.8) sebagai berikut:

$$\vec{X} = c_1\vec{k}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2\vec{k}_2 e^{\lambda_2 t} + c_3\vec{k}_3 e^{\lambda_3 t}$$
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} e^{2t} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{3t}$$

dengan c_1, c_2, c_3 adalah konstanta.

2.4.2 Sistem Persamaan Diferensial Nonlinear

Bentuk umum sistem persamaan diferensial otonomus adalah

$$\frac{d\vec{X}}{dt} = \vec{f}\left(\vec{X}\right) \tag{2.9}$$

dengan $f : E \to \mathbb{R}^n$ dengan $E \subset \mathbb{R}^n$ (Perko, L, 2001).

Persamaan diferensial dikatakan nonlinear jika persamaan diferensial tersebut memenuhi paling sedikit satu dari tiga kriteria berikut:

a) Memuat variabel tak bebas dari turunan-turunan yang berpangkat selain satu.
b) Terdapat perkalian dari variabel tak bebas dan atau turunan-turunannya.
c) Terdapat fungsi transedental dari variabel tak bebas dan turunan-turunannya.

Contoh 2.4.2

Contoh persamaan diferensial nonlinear sebagai berikut!

a. $\frac{d^3x}{dt^3}+9\left(\frac{dx}{dt}\right)^3+2x=0$

Contoh (a) diatas merupakan persamaan diferensial nonlinear, dimana terdapat variabel bebas yang berpangkat tiga $\left(\frac{d^3x}{dt^3}\right)$ dan turunannya yang berpangkat tiga $\left(\left(\frac{dx}{dt}\right)^3\right)$.

b. $10x\frac{dx}{dt}+2t=0$

Contoh (b) diatas merupakan persamaan diferensial nonlinear, karena terdapat perkalian variabel bebas dan turunannya $\left(10x\frac{dx}{dt}\right)$.

c. $\frac{dx}{dt}+t=e^t$

Contoh (c) di atas merupakan persamaan diferensial nonlinear, karena terdapat fungsi transenden e^t.

Dikatakan sistem persamaan diferensial nonlinear, jika persamaan diferensial yang membentuknya merupakan persamaan diferensial nonlinear (Jusrawati, 2018).

Contoh 2.4.3

Diberikan sistem persamaan sebagai berikut:

$$\frac{d\vec{X}}{dt} = \begin{bmatrix} x_1 - x_2^{\,2} \\ x_2 - x_1 x_2^{\,2} \end{bmatrix} \tag{2.10}$$

Sistem persamaan pada (2.10) merupakan sistem persamaan diferensial nonlinear.

2.5 Linearisasi

Linearisasi adalah proses mengubah sistem persamaan diferensial nonlinear menjadi sistem persamaan diferensial linear. Linearisasi suatu sistem persaman diferensial nonlinear dilakukan untuk mengetahui perilaku sistem di sekitar titik kesetimbangan sistem tersebut. Adapun syarat linearisasi adalah bahwa real akar karakteristik tidak nol. Linearisasi dapat dilakukan dengan menggunakan matriks Jacobian (Ni'mah., & Savitri., 2022).

Definisi 2.5.1 (Olsder, J.G & Woude Der Van, W. J., 2005)

Vektor $\vec{X}^* \in \mathbb{R}^n$ disebut titik kesetimbangan (*equilibrium point*) dari $\dfrac{d\vec{X}}{dt} = \vec{f}\left(\vec{X}\right)$ jika memenuhi $\vec{f}\left(\vec{X}^*\right) = \vec{0}$.

Definisi 2.5.3 (Olsder, J.G & Woude Der Van, W. J., 2005)

(i) Titik kesetimbangan $\vec{X}^*$ dikatakan stabil jika untuk setiap ε >0, terdapat $\delta(\varepsilon)$>0, sedemikian sehingga jika $\left\|\vec{X}_0 - \vec{X}^*\right\| < \delta$, maka $\left\|\vec{X}\left(t, \vec{X}_0\right) - \vec{X}^*\right\| < \varepsilon$.

(ii) Titik kesetimbangan $\vec{X}^*$ dikatakan stabil asimtotik jika titik kesetimbangan $\vec{X}^*$ stabil dan terdapat δ_1 >0 sedemikian sehingga $\lim_{t\to\infty}\left\|\vec{X}\left(t, \vec{X}_0\right) - \vec{X}^*\right\| = 0$ asalkan $\left\|\vec{X}_0 - \vec{X}^*\right\| < \delta_1$.

(iii) Titik kesetimbangan dikatakan tidak stabil jika titik kesetimbangan tidak memenuhi poin (i).

Definisi 2.5.3 (Kocak, H.,& H. J.K, 1991)

Diberikan $\frac{d\vec{X}}{dt} = \vec{f}\left(\vec{X}\right), \vec{X} \in \mathbb{R}^n$ dengan $\vec{f} = \left(f_1, f_2, ..., f_n\right)$ dengan $\vec{f} \in C\left(E\right)$ dan titik $\vec{X}^* \in \mathbb{R}^n$ merupakan titik ekuilibrium dari fungsi $\vec{f} = \left(f_1, f_2, ..., f_n\right)$.

Diberikan matrik Jacobian dari $\vec{f}$ di titik $\vec{X}^*$

$$J\left(\vec{f}\left(\vec{X}^*\right)\right) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\left(\vec{X}^*\right) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\left(\vec{X}^*\right) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}\left(\vec{X}^*\right) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}\left(\vec{X}^*\right) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\left(\vec{X}^*\right) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}\left(\vec{X}^*\right) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}\left(\vec{X}^*\right) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}\left(\vec{X}^*\right) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}\left(\vec{X}^*\right) \end{bmatrix} \tag{2.11}$$

Matriks pada persamaan (2.11) adalah matriks Jacobian dari fungsi $\vec{f} = \left(f_1, f_2, ..., f_n\right)$ di titik $\vec{X}^*$.

Definisi 2.5.4 (Perko,L, 2001)

Diberikan matriks Jacobian $J\left(\vec{f}\left(\vec{X}^*\right)\right)$. Sistem linear

$$\frac{d\vec{Y}}{dt} = J\left(\vec{f}\left(\vec{X}^*\right)\right)\vec{Y}$$

disebut linearisasi sistem nonlinear sistem $\frac{d\vec{X}}{dt} = \vec{f}\left(\vec{X}\right)$ di sekitar titik $\vec{X}^*$.

Adapun nilai eigen dari martiks Jacobian (2.11) adalah akar-akar yang diperoleh dari persamaan

$$\left|J\left(\vec{f}\left(\vec{X}^*\right)\right) - \lambda I\right| = 0 \tag{2.12}$$

dengan I adalah matriks identitas, dan λ adalah akar persamaan (2.12) yang selanjutnya disebut sebagai nilai eigen.

Berikut teorema kriteria kestabilan titik kesetimbangan.

Teorema 2.5.1

Misalkan titik $\vec{X}^* \in \mathbb{R}^n$ adalah titik kesetimbangan $\frac{d\vec{X}}{dt} = \vec{f}\left(\vec{X}\right)$.

1. Jika bagian real semua nilai eigen $J\left(\vec{f}\left(\vec{X}^*\right)\right)$ negatif, maka titik $\vec{X}^* \in \mathbb{R}^n$ stabil asimtotik.
2. Jika terdapat nilai eigen matriks $J\left(\vec{f}\left(\vec{X}^*\right)\right)$ yang memiliki bagian real positif, maka titik $\vec{X}^* \in \mathbb{R}^n$ tidak stabil.

2.6 Kriteria Routh-Hurwitz

Kriteria Kestabilan Routh-Hurwitz adalah suatu metode yang digunakan untuk menunjukkan kestabilan sistem dengan memperhatikan koefisien dari persamaan karakteristik tanpa menghitung akar-akar secara langsung. Jika persamaan polinomial adalah persamaan karakteristik,maka metode ini dapat digunakan untuk menentukan kestabilan dari suatu sistem. Persamaan polinomial orde ke-n dalam bentuk berikut:

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} +,\ldots,+ a_{n-1}\lambda^n + a_n = 0 \tag{2.13}$$

dimana koefisien-koefisien adalah besaran nyata $a_0 \neq 0$.

a) Tabel Routh yang bersesuaian untuk polinomial (2.13) adalah

Tabel 2.6 Routh untuk polinom (2.13)

Variabel	Koefisien					
λ^n	a_0	a_2	a_4	a_6	$\cdots$	a_{n-1}
λ^{n-1}	a_1	a_3	a_5	a_7	$\cdots$	a_n
λ^{n-2}	b_1	b_2	b_3	b_4	$\cdots$	b_n
λ^{n-3}	c_1	c_2	c_3	c_3	$\cdots$	c_n
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$				
λ^2	e_1	e_2				
λ^1	f_1					
λ^0	g_1					

dengan koefisien-koefisien dinyatakan:

$$b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1}, b_2 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1}, \cdots, b_n = \frac{a_1 a_{2n} - a_0 a_{2n+1}}{a_1}$$

$$c_1 = \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1}, c_2 = \frac{b_1 a_5 - a_1 b_3}{b_1}, \cdots, c_n = \frac{b_1 a_{2n+1} - a_1 b_{n+1}}{b_1}$$

b) Banyaknya akar tak stabil dapat dilihat dari banyaknya perubahan tanda pada kolom pertama Tabel 2.6.

c) Syarat perlu untuk stabil adalah semua suku pada kolom pertama tabel Routh bertanda sama.

2.7 Bilangan Reproduksi Dasar

Bilangan reproduksi dasar (*Basic Reproduction Number)*merupakan rata-rata banyaknya individu rentan hingga menjadi infeksius akibat satu individu infeksius selama masa infeksius dan dinotasikan dengan $\left(R_0\right)$. Bilangan tersebut diperlukan sebagai parameter untuk mengetahui tingkat penyebaran suatu penyakit. Bilangan reproduksi dasar dapat ditentukan dengan menggunakan persamaan yang hanya mengandung infeksius.

Metode *Next Generation Matrix* (NGM) merupakan metode yang digunakan untuk menentukan bilangan reproduksi dasar. Metode *next generation matrix,* R_0 didefinisikan sebagai nilai eigen terbesar dari *next generation matrix.* Prosedur dalam menentukan R_0 adalah sebagai berikut:

a) Diberikan model epidemi yang terdiri dari *n* kompartemen yaitu

$$\frac{dX_i}{dt} = f_i\left(\vec{\mathrm{X}};\mu\right) \tag{2.14}$$

dengan $i = 1, 2, ..., n$

b) Kompartemen disusun sehingga $m \leq n$ kompartemen pertama adalah kompartemen penyakit (terinfeksi, terekspos,virus,parasit,bakteri).

c) Berdasarkan (a) dan (b), diperoleh $\mathrm{g}\left(\vec{\mathrm{X}};\mu\right) = \mathcal{F}_i\left(\vec{\mathrm{X}};\mu\right) - \mathcal{V}\left(\vec{\mathrm{X}};\mu\right)$ dengan

$\mathcal{V}_i\left(\vec{\mathrm{X}};\mu\right) = \mathcal{V}^-{}_i\left(\vec{\mathrm{X}};\mu\right) - \mathcal{V}^+{}_i\left(\vec{\mathrm{X}};\mu\right)$ untuk $i = 1, 2, ..., m$.

$\mathcal{F}_i$ merepresentasikan bagian infeksi baru, $\mathcal{V}_i^+$ menyatakan bagian transisi individu ke kompartemen *i*, $\mathcal{V}_i^-$ merupakan bagian transisi individu keluar dari kompartemen *i*.

d) Misalkan $\vec{X}^*$ adalah titik kesetimbangan bebas penyakit sistem (2.14) maka

$$F = \left|\frac{\partial \mathcal{F}_i}{\partial x_j}\left(\vec{\mathrm{X}}^*;\mu\right)\right| \text{ dan } V = \left|\frac{\partial \mathcal{V}_i}{\partial x_j}\left(\vec{\mathrm{X}}^*;\mu\right)\right| \text{ dengan } 1 \leq i, j \leq m.$$

e) $R_0 = \rho\left(FV^{-1}\right)$ dengan $\rho\left(FV^{-1}\right)$ adalah spektral radius atau nilai eigen dominan matriks FV^{-1} merupakan matriks generasi selanjutnya (Nur, W, 2023).

Teorema 2.7.1 (Driessche, den, Van, P, 2017)

Jika $\vec{X}_0$ adalah titik kesetimbangan bebas penyakit dari sistem $\frac{dX_i}{dt} = F_i\left(X\right) - V_i\left(X\right)$ maka $\vec{X}_0$ stabil asimtotik lokal jika $R_0 < 1$ dan tidak stabil jika $R_0 > 1$.

2.8 Hepatitis Non Hep A-E akut

Hepatitis merupakan penyakit yang menyebabkan peradangan pada hati yang disebabkan oleh virus sehingga dapat menular dari orang-ke orang. Pada tahun 2019 pemerintah indonesia menetapkan hepatitis sebagai kejadian luar biasa karena banyaknya kasus hepatitis. Hepatitis mempengaruhi kualitas kesehatan masyarakat, produktivitas, harapan hidup, dan dampak sosial ekonomi masyarakat (Fitrya., et al., 2021). Jika tidak dilakukan penangan yang tepat penyakit hepatitis akan menjadi kronis dan menyebabkan kanker hati. Hepatitis non hep A-E akut merupakan wabah penyakit hepatitis baru yang menginfeksi anak berusia 1-16 tahun. Hipotesis utama penyebab penyakit hepatitis non hep A-E akut ialah *adenovirus* yang menjadi *patogen* potensial yang paling sering terdeteksi pada penyakit ini. *Adenovirus* adalah kelompok virus yang menyebabkan infeksi pada saluran pernapasan, mata, paru-paru, dan saluran pencernaan, virus ini dapat menyerang siapa saja, tetapi lebih sering menyerang anak-anak. Virus ini akan muncul dan dirasakan oleh penderita setelah kurang lebih 2-14 hari setelah terpapar. Disamping itu, gejala awal individu dengan hepatitis non hep A-E akut umumnya mengalami gangguan *gastrointestinal* seperti sakit perut, diare, mual, dan muntah. Gejala tersebut dapat berlanjut hingga penyakit kuning (kulit dan mata menguning), kelelahan, kehilangan nafsu makan, demam, urin gelap, tinja berwarna terang, nyeri sendi, gangguan pembekuan darah, kejang, dan hingga penurunan kesadaran. Penyakit hepatitis non hep A-E akut bersifat akut, dimana terjadi dalam kurun waktu 6 bulan (Kemenkes RI, 2022).

Penyakit hepatitis non hep A-E akut dapat menyebar dengan Infeksi *adenovirus* di lingkungan menular melalui transmisi langsung dan transmisi tak langsung. Transmisi langsung yaitu individu yang infeksius melalui *droplet* (cairan atau cipratan liur yang dikeluarkan dari hidung), dan transmisi tak langsung yaitu *fecal-oral* (mengonsumsi makanan maupun minuman yang terkontaminasi virus), dan *inokulasi konjungtiva* atau secara tidak langsung melalui paparan benda yang terkontaminasi virus. Infeksi dari penyebaran penyakit ini dapat menyebar dengan cepat di antara populasi tertutup, misalnya di rumah sakit dan sekolah (ECDC, 2022).

Usaha yang bisa dilakukan untuk pencegahan penyakit hepatitis non hepA-E akut yaitu dengan menggunaan masker dan pengobatan. Masker adalah alat perlindungan diri yang dirancang untuk melindungi dari menghirup partikel udara dan melindungi kesehatan saluran pernapasan. Penggunaan masker mengurangi infeksi *influenza* pada manusia dengan mencengah percikan yang dapat menyebabkan infeksi dari orang yang terinfeksi ke orang lain dan terkontaminasi lingkungan (Sudiadnyanti, P, N., et al., 2021). Penggunaan masker merupakan bagian komprehensif langkah pencegahan penyakit. Masker dapat digunakan untuk melindungi saat berkontak dengan orang yang infeksius atau untuk mengendalikan sumber (dipakai oleh orang yang infeksius untuk mencengah penularan lebih lanjut). dengan demikian penelitian ini penting untuk meningkatkan pengetahuan dan membentuk kebiasaan baik yang bisa diterapkan untuk mengoptimalkan derajat kesehatan anak dan meminimalkan pencengah penyebaran penyakit (Sari, S, R., et al., 2021). Pengobatan dilakukan dengan pemberian obat antivirus untuk menurunkan virus dalam tubuh, melawan virus, dan memeperlambat kemampuan virus dalam merusak hati. Dengan adanya penelitian ini diharapkan dapat memberikan efek perlindungan untuk penyakit hepatitis non hep A-E akut baik untuk pengendalian maupun perlindungan pada anak.

2.9 Penelitian Relevan

Hasil penelitian diantaranya penyebaran penyakit hepatitis dan penyebaran penyakit hepatitis akut non hepA-E diantaranya Model epidemi SICKR pada penyebaran penyakit hepatitis B dan kanker hati. Penelitian ini menjelaskan model SICKR (Rentan, Terpapar, Infeksi, Cronis, Kanker, dan Sembuh), dan mengasumsikan bahwa individu yang telah sembuh dari penyakit tidak akan tertular virus hepatitis B, dimana penyakit ini bersifat kronis, serta dalam penelitian ini menggunakan intervensi berupa vaksinasi, yang ditulis oleh (Supu et al., 2021), kemudian model SEIR untuk penyebaran penyakit hepatitis C dengan pengobatan pada populasi terinfeksi kronis. Dalam penelitian ini menjelaskan model SEIR (Rentan terinfeksi, Terjangkit infeksi, Terinfeksi akut, Terinfeksi kronis, dan Sembuh), dimana mengasumsikan bahwa individu yang telah terinfeksi akut akan bertransimi menjadi individu yang terinfeksi kronis, dan individu yang sembuh permanen akibat bantuan *inang primer* pada populasi terinfeksi akut serta sembuh dengan bantuan medis pada populasi terinfeksi kronis, yang ditulis oleh (Ilahi et al., 2021), lalu hepatitis E epidemiologi penyakit dan penularan, yang membahas mengenai penyakit hepatitis E yang bersifat akut, dimana virus hepatitis E adalah salah satu penyebab paling umum dari kasus hepatitis akut, penularan penyakit ini dapat terjadi melalui tinja dan orang yang minum air atau makan makanan yang terkontaminasi kotoran pembawa virus. Solusi yang bisa dilakukan untuk mencengah penyakit ini adalah dengan menjaga kebersihan, vaksin, dan pengobatan, ditulis oleh (Pingkan et al., 2022). Selanjutnya Pemodelan penularan penyakit hepatitis menggunakan model SEIR yang membahas mengenai model matematika penyakit hepatitis menggunakan model SEIR (Rentan, Terpapar, Infeksi, dan Sembuh), dimana individu yang bertahan akibat penyakit akan sembuh sembuh, serta dalam penelitian ini menggunakan pengobatan sebagai upanya pencengahan penyakit., yang ditulis oleh (Bormasa et al., 2022).

Analisis kestabilan model SITR pada penyebaran penyakit hepatitits A dengan vaksinasi. Penelitian ini membahas mengenai model matematika SITR

(Rentan, Infeksi, Treatment, Sembuh) yang mengasumsikan bahwa individu yang infeksi akan mendapat *treatment*, Pasien akan sembuh setelah mendapat *treatment* dan individu yang telah sembuh tidak akan terjangkit lagi, dimana hepatitis A adalah penyakit yang bersifat akut, ditulis oleh (Sidik ,Tri, A., 2022) kemudian, Analisis Dinamik Model SIRC pada Transmisi Hepatitis B dengan Sirosis Hati. Dalam penelitian ini membahas model matematika SIRC (Rentan, Infeksi, Sembuh, dan Sirosis Hati), yang mengasumsikan bahwa individu yang terkena sirosis hati dapat sembuh dan individu yang telah sembuh tidak akan tertular virus hepatitis B, yang ditulis oleh (Febriyanti et al., 2023), lalu mengembangkan model Analisis Model Matematika dan Simulasi Pada Penyebaran Hepatitis Non HepA-E Akut di Indonesia, dimana dalam penelitian ini membahas mengenai model matematika SEIR (Rentan, Terpapar, Infeksi, Sembuh), yang mengasumsikan bahwa individu yang terinfeksi dapat sembuh dari penyakit dan kebal terhadap penyakit dan tidak akan kembali rentan setelah dilakukan pengobatan, ditulis oleh (Ristiawan, R ., et al., 2023).

BAB V
PENUTUP

Berdasarkan penelitian yang telah dilakukan maka diperoleh kesimpulan dan saran sebagai berikut.

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan yang telah dilakukan maka, dapat disimpulkan sebagai berikut:

1. Hasil model *SEIVR* pada penyakit hepatitis non hep A-E akut seebagai berikut:

$$\frac{dS(t)}{dt} = \Lambda - \left(\beta_1(1-m)I + \beta_2 V\right)S - \mu S$$

$$\frac{dE(t)}{dt} = \left(\beta_1(1-m)I + \beta_2 V\right)S - (\sigma + \mu)E$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = \sigma E - (\eta + \rho + \mu + \omega)I$$

$$\frac{dV(t)}{dt} = \alpha(1-m)I - \mu_v V$$

$$\frac{dR(t)}{dt} = (\eta + \rho)I - \mu R$$

2. Model epidemi *SEIVR* pada penyakit hepatitis non hep A-E akut dengan transmisi langsung dan tak langsung dan penggunaan masker nenghasilkan dua titik kesetimbangan sebagai berikut:
   a. Titik kesetimbangan bebas penyakit

   $$\left(\frac{\Lambda\sigma}{\sigma\mu}, 0, 0, 0, 0\right)$$

   b. Titik kesetimbangan endemik

   $$\left(\frac{\Lambda\sigma P_1 - j_2 j_3 P_2}{P_1\sigma\mu}, \frac{j_3 P_2}{P_1\sigma}, \left(\frac{P_2}{P_1}\right), \frac{\alpha j_1 P_2}{P_1\mu_v}, \frac{j_4 P_2}{P_1\mu}\right) \text{dengan}$$

$$j_1 = 1 - m$$
$$j_2 = \sigma + \mu$$
$$j_3 = \eta + \rho + \mu + \omega$$
$$j_4 = \eta + \rho$$

$$P_1 = \beta_1 j_1 j_2 j_3 \mu_v + \beta_2 \alpha j_1 j_2 j_3 < 0$$

$$P_2 = \beta_2 \alpha j_1 \Lambda \sigma + \beta_1 j_1 \Lambda \sigma \mu_v - j_2 j_3 \mu \mu_v$$

Berdasarkan analisis kestabilan titik kesetimbangan yang dilakukan, diperoleh bahwa titik kesetimbangan bebas penyakit $\left(E_0\right)$ stabil jika $\frac{FG - J}{F} > 0$, dan $R_0 < 1$, dan titik kesetimbangan endemik $\left(E_1\right)$ stabil jika $U > 0$, $\frac{UV - W}{U} > 0$, $\frac{WUV - W^2 - U^2 Z}{UV - W} > 0$, dan $Z > 0$. Selain itu, diperoleh $R_0 = \frac{\beta_1 j_1 \Lambda \sigma \mu_v + \beta_2 \alpha j_1 \Lambda \sigma}{j_2 j_3 \mu \mu_v}$.

3. Berdasarkan hasil simulasi numerik terlihat bahwa penyakit hepatitis non hep A-E akut akan berkurang seiring berjalannya waktu jika $R_0 < 1$. Semakin besar proporsi penggunaan masker dan laju kesembuhan karena pengobatan dapat memperkecil tingkat penyebaran penyakit hepatitis non hep A-E akut. Jika intervensi ini dilakukan secara optimal, maka bilangan reproduksi dasar R_0 dapat ditekan hingga kurang dari satu. Hal ini berarti setiap individu infeksius akan menularkan penyakit kurang dari satu individu lainnya, sehingga penyebarannya dapat dihentikan. Hasil simulasi numerik juga menunjukkan bahwa mengombinasikan kedua intervensi yaitu penggunaan masker dan laju kesembuhan karena pengobatan lebih efektif dalam menekan R_0 dibandingkan dengan menerapkan salah satu intervensi.

5.2 Saran

Pada tugas akhir ini, penulis membahas tentang analisis dinamik model epidemi penyakit hepatitis non hep A-E akut dengan transmisi langsung dan penggunaan masker. Untuk penelitian selanjutnya, disarankan untuk dapat memperluas model epidemi penyakit hepatitis non hep A-E akut dengan mempertimbangkan variabel lain yang berpotensi mempengaruhi dinamika penyebarannya, seperti difokuskan pada identifikasi antigen yang spesifik untuk hepatitis non hep A-E dan pengembangan vaksin yang efektif dalam mencegah infeksi ini, pengembangan model matematika baru penyakit hepatitis non hep A-E akut hingga tahap kronis dan kanker hati. Ini bisa mencakup uji coba klinis untuk menilai keamanan dan efektivitas vaksin baru yang cocok untuk anak berusia 1-16 tahun yang umumnya sangat rentan terhadap penyakit hepatitis non hep A-E akut. Dari sudut pandang kesehatan anak, diharapkan untuk orang tua dapat memberikan pengobatan dan penggunaan masker untuk melindungi anak dari ancaman penyakit hepatitis non hep A-E akut.

DAFTAR PUSTAKA

Afifah., 2011, Model matematika glukosa dan insulin pada penyakit diabetes melitus, *Skripsi*, Jurusan matemtika, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Anton, H., 2010, *Elementary Algebra* (10th ed), Wiley.

Bormasa, E., et. al., 2022, Pemodelan penularan penyakit hepatitis menggunakan model seir, *Jurnal of Matematika and Applications,* Vol.1, No.2, : https://journalfmipa.univpasifik.ac.id/index php/amalgamasi/article/view/8.

Cantika, Mutiara, Quenela., 2022, Perkembangan kasus hepatitis akut yang tidak diketahui etimologinta di Indonesia, *Kajian literatur*, Universitas Indonesia, Drepok.

Driessche, den, van, P. ,. 2017, Reproduction numbers of infectious disease models. Infectious disease modelling, *KeAi Advancing Reseach Evolving Science.* Vol. 2, : https://doi.org/10.1016/j.idm.2017.06.002.

ECDC., 2022, Peningkatan kasus hepatitis akut berat dengan etiologi tidak diketahui pada anak-anak. https://www.ecdc.europa.eu/sites/default/files documents/RRA-20220420-218-erratum.

Evan C. Lawrence., 2022, *Persamaan Diferensial Parsial*, Vol .19, Ed.2, American Mathematical Society.

Febriyanti, R., Prihandono, B., & Kiftiah., 2023, Analisis Dinamik Model SIRC pada Transmisi Hepatitis B dengan Sirosis Hati, *Jurnal Ilmiah Matematika, Sains Dan Teknologi*, Vol.11, No.,2 248–261. https://doi.org/10.37 905/euler.v11i2.22761.

Frediansyah, A, et al., 2022, Hepatitis akut berat dengan etiologi tidak diketahui pada anak, , *Tinjauan mini*, Riset dan Inovasi Republik Indonesia,Vol. 2, No. 2, Doi: 10.20944/Preprints202205.0370.

Fitrya, et al., 2021, Edukasi pencengahan penyakit menular(Hepatitis) dan sosialisasi pengobatan hepatitis menggunakan herbal medicine di desa Indralaya mulya, *Jurnal kerativitas pengabdian kepada masyarakat,* Vol. 4, No. 3, https://ejurnalmalahayati.ac.id/index.php/kreativitas/article/view/3521

Ilahi, F., Fadilaturrohmah, N. J., 2021, Model seir untuk penyebaran penyakit hepatitis c dengan pengobatan pada populasi terinfeksi kronis, *Jurnal Riset dan Aplikasi Matematika*,Vol.5, No., pp 19-28, : https://journal.unesa.ac.id/ index php/jram/view.

Jusrawati., 2018, Pemodelan matematika terhadap kelangsungan hidup penderita diabetes melitus, *Skripsi*, Jurusan Matematika, Universitas Islam Negeri Alauddin Makassar.

Julia, I., 2015, Analisis kestabilan titik kesetimbangan model matematika proses transmisi virus dengue di dalam tubuh manusia dengan terapi obat herbal, *Skripsi*, Program Studi Matematika, Universitas Negeri Malang.

Kaya, K., et al., 2021, Model Matematika pada Penyakit Diabetes Melitus dengan Faktor Genetik dan Faktor Sosial, *Journal of Mathematics: Theory andApplications*, Vol. 3, No. 1,:https://ojs.unsulbar.ac.id/index. php/Mathem atics/article/view/1366/731.

Kemenkes RI., 2022. Upaya Kemenkes Antisipasi Penyebaran Hepatitis Akut di Indonesia, [online], Sehat Negeriku, *Available at:*https://sehatnegerik sehatnegeriku.kemkes.go.id/baca/umum/20220513/5039824/upayakemenkes antisipasi- penyebaran-hepatitis-akut-di- Indonesia.

Kocak, H. , & H. J. K., 1991, *Dinamika dan Bifurkasi*, Vol.3, New York Springer-Verlag.

Ni'mah, F., & Savitri, D., 2022, Analisis kestabilan model eko-epidemiologi dengan fungsi respon holling tipe I, *Jurnal Ilmiah Matematika,* Vol.10. No.1,: https://www.semanticscholar.org/reader/7bfbdb6d4ed64b26818556520dd8e3 29a34bd71a.

Nur, W., 2023, Kajian dan Pengendealian penyakit *schistosomiasis* dengan Model matematika, *Disertasi*, Program Studi Doktor Matematika Bidang Minat Matematika Biologi, Universitas Barawijaya Malang.

Olsder, J.G . ., & Woude Der Van, W. J., 2025, *Mathematical Systems Theory,* Vol.16, Ed 3, Delf, Belanda.

Pagalay,U., 2009, *Mathematical modelling: Aplikasi pada kedokteran, imunologi, biologi, ekonomi, dan perikanan*, UIN-Maliki Press, Malang.

Perko, L., 2001*, Sistem Nonlinier: Teori Global. Persamaan Diferensial dan Sistem Dinamis*, Vol. 7, Spinger, New York, Amerika Serikat.

Pingkan, W., Kaunang, J., Waani, A., & Tioho, T., 2022, Hepatitis E epidemiologi penyakit menular, *Skripsi mini,* Program studi kesehatan masyarakat, Universitas Sam Ratulagi Manado.

Ristiawan, R., et al., 2023, Analisis Model Matematika dan Simulasi Pada Penyebaran Hepatitis Non HepA-E Akut di Indonesia, *Faktor Exacta*, *16*(4), https://doi.org/10.30998/faktorexacta.v16i4.19670.

Sallam, M., Mahafzah, A., & Sahin, O, G., 2022, Hepatitis dengan Asal dan Etiologi yang Tidak Diketahui (Hepatitis Akut Non HepA-E) pada Anak, *National library of medicine*, *10*(6). https://doi.org/103390/healthcare100.

Saputri, R., 2017, Solusi Numerik Model Matematika Glukosa, Insulin, dan Sel, *Skripsi,* Jurusan matematika, Universitas Negeri Maulana Malik Ibrahim.

Sari, S,R., et al., 2021, Meningkatnya pengetahuan cara mencuci tangan dan penggunaan masker yang benar melalui penyuluhan kesehatan anak, *Jurnal Masyarakat Mandiri*, Vol. 5, No. 2, : https://doi.org/10.31764/jmm.v5i2.4056.

Sidik ,T, A., et al., 2022, Analisis kestabilan model SITR pada Penyebaran Penyakit Hepatitis A dengan Vaksinasi, *Research in the Matematika and Natural Science* ,Vol. 1, No. 1, : https://journal.scimadly.com/index.php /rmns/index.

Sudiadnyani, P, N., et al., 2021, Penyuluhan tentan pentingnya penggunaan masker dengan baik dan benar pada anak-anak, *Jurnal Kreativitas Pengetahuan Kepada Mayarakat*, Vol. 4, No. 3, : https://ejurnalmalahayati.ac.id/index.php/kreativitas/article/v.

Supu, A, N., et al., 2021, Model epidemi SICKR pada penyebaran penyakit hepatitis B dan kanker hati, *Center for Open Science*, https://osf.io/preprints/osf/9j5er.

Syamsuddin, T, 2013, Analisis kestabilan dan keuntungan maksimal pada model Pertumbuhan populasi mangsa-pemangsa Dengan tahapan struktur, *Natural Science dan Mathematics*, : https://pubmed.ncbi.nlm.go /29928743.

Yulianti, S. , R. S. R. , & B. N. ,. 2016, Analisis penyebaran penyakit diarae sebagai salah satu penyebab kematuian pada balita menggunakan model matematika SIS, Tesis, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Yogyakarta.