SKRIPSI

ANALISIS PENYEBARAN VIRUS ZIKA DENGAN MODEL SEI-SI

JENITAWATI

E0119502

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS SULAWESI BARAT
TAHUN 2024

HALAMAN PENGESAHAN

Skripsi ini diajukan oleh:

Nama	: Jenitawati
NIM	: E0119502
Judul	: Analisis Penyebaran Virus Zika Dengan Model SEI-SI

Telah berhasil di pertanggung jawabkan di hadapan Tim Penguji (SK Nomor 98/UN55.7/HK.04/2024,12/12/2024) dan diterima sebagai bagian persyaratan memperoleh gelar Sarjana S1 Matematika pada Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Sulawesi Barat.

Disahkan oleh:

Dekan FMIPA
Universitas Sulawesi Barat

MUSAFIRA, S.Si., M.Sc.
NIP. 197709112006042002

Tim penguji:

Ketua Penguji	: Musafira, S.Si., M.Sc.	(..................)
Sekretaris	: Ahmad Ansar, S.Pd., M.Sc.	(..................)
Pembimbing 1	: Dr. Wahyudin Nur, S.Si., M.Si.	(..................)
Pembimbing 2	: Darmawati, S.Si., M.Si.	(..................)
Penguji 1	: Rahmawati, S.Si., M.Si.	(..................)
Penguji 2	: Fardinah, S.Si., M.Sc.	(..................)
Penguji 3	: Meryta Febrilian Fatimah, S.Si., M.Sc.	(..................)

ABSTRAK

Skripsi ini membahas kotruksi dan analisis dinamik model epidemi SEI-SI penyebaran virus zika. Model tersebut mempertimbangkan penggunaan *repellent* dan intervensi *fogging*. Analisis dinamik menentukan kondisi dimana titik kesetimbangan bilangan reproduksi dasar (R_0), syarat eksistensi titik kesetimbangan, dan analisis kestabilan lokal. Berdasarkan hasil analisis diperoleh dua macam titik kesetimbangan, yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit yang selalu eksis dan titik kesetimbangan endemik yang eksis bersyarat. Titik kesetimbangan bebas penyakit bersifat stabil asimtotik lokal jika (R_0) kurang dari satu, sedangkan titik kesetimbangan endemik bersifat stabil asimtotik lokal jika memenuhi kriteria Routh-Hurwitz. Hasil simulasi numerik menunjukkan bahwa semakin banyak penggunaan *repellent* dan intervensi *fogging* pada individu dapat memperkecil R_0 dan ukuran subpopulasi pada individu terpapar dan infeksius. Hasil simulasi numerik juga menunjukkan bahwa mengombinasikan kedua intervensi yaitu penggunaan *repellent* dan intervensi *fogging* lebih efektif menekan R_0 dibandingkan menerapkan salah satu intervensi.

Kata kunci: Model Epidemi, Virus Zika, SEI-SI.

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Zika merupakan virus yang disebabkan oleh nyamuk *Aedes*. (Rezapour, dkk, 2020). Kasus virus zika ditemukan di Uganda dan Tanzania pada tahun 1954. Wabah virus zika telah diamati di banyak wilayah seperti Asia, Afrika, Amerika, dan wilayah lainya (Organisasi Kesehatan Dunia, 2018). virus zika masuk di Indonesia pada tahun 1977. virus zika sangat berbahaya bagi perkembangan wanita hamil karena virus ini dapat mengakibatkan sejumlah kelainan pada otak janin, proses perkembangan janin tidak normal dan dapat mengakibatkan kerusakan jaringan otak pada janin selama dalam kandungan (mikrosefali) (Gabis, dkk,1997).

Penyebaran virus zika dapat melalui gigitan nyamuk, melalui kontak seksual, transfusi darah, dari ibu kebayi yang dikandung selama masa kehamilan. (Rezapour, dkk, 2020). Gejala infeksi virus zika adalah nyeri otot, ruam, demam, dan mata merah. Gejala ini biasanya berlangsung selama 2-7 hari. Belum ada vaksin untuk mencegah atau mengobati orang yang tertular virus zika. Mereka yang terinfeksi hanya dapat melakukan istirahat dan pengobatan untuk meredakan gejala (Organisasi Kesehatan Dunia 2018).

Di seluruh dunia, terutama di Indonesia, kurangnya vaksin telah membuat virus zika menjadi masalah Kesehatan yang serius. Penularan penyakit zika memerlukan penyelidikan lebih lanjut. Dinamika penyebaran virus zika dapat dipelajari dengan pemodelan matematika Aldila dkk, (2021). Konstruksi model yang diusulkan oleh penulis Padmanabhan P, Seshaiyer P and Castillo-Chavez C (2017), dengan modifikasi model transmisi zika dengan mempertimbangkan transisi dari manusia tanpa gejala dan bergejala dan menghasilkan model matematika penyebaran penyebaran penyakit virus zika dengan model SEI-SI dengan beberapa kelompok yang terdiri dari dua subpopulasi. Populasi manusia dan populasi nyamuk. Populasi manusia terbagi atas tiga subpopulasi yaitu populasi manusia rentan (*Susceptible*), populasi manusia terpapar (*Exposed*), dan populasi manusia terinfeksi (*Infected*). Namun ada dua subpopulasi dalam nyamuk yaitu populasi nyamuk yang rentan (*Susceptible*) dan yang terinfeksi (*Infected*). Demikian pula, dalam penelitian yang dilakukan Goswami, dkk (2018) yaitu dengan menganalisis model tentang penyebaran zika penyakit yang ditularkan oleh nyamuk dan ditularkan ke manusia melalui gigitan nyamuk *Aedes* yang terinfeksi dan juga dapat melalui kontak seksual sehingga bentuk model matematikanya yaitu SIR-SI. Oleh karena itu, pemodelan matematika berperan penting dalam mencari solusi permasalahan dunia nyata terutama pada penyebaran penyakit virus zika.

Pada penelitian ini, model matematika penyebaran virus zika asumsi bahwa manusia yang sudah bergejala dapat kembali terinfeksi. Adapun cara dalam pencegahan penyebaran DBD adalah dengan memberantas populasi nyamuk atau mengurangi kontak antara nyamuk dengan manusia melalui penggunaan *repellent* (WHO 2009). Sama seperti virus zika, DBD juga ditularkan ke manusia melalui gigitan nyamuk *aedes aegypti* (WHO,2009). Model matematika yang akan dikembangkan adalah model matematika SEI-SI (*Susceptible, Exposed, Infected,*).

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan hal tersebut di atas, berikut ini adalah isu-isu yang akan dijawab dalam penelitian ini:

1. Bagaimana model matematika penyebaran penyakit zika dengan model SEI-SI?
2. Bagaimana analisis model penyebaran penyakit zika?
3. Bagaimana hasil yang ditunjukkan oleh simulasi numerik dan intrerpretasi model penyebaran penyakit zika?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah, maka tujuan dari penelitian ini yaitu:

1. Membangun model matematika penyebaran penyakit zika.
2. Melakukan analisis dinamik model penyebaran penyakit zika.

3. Menjalankan dan menganalisis model penyebaran penyakit zika menggunakan simulasi numerik dan interpretasi.

1.4 Manfaat Penelitian

Adapun maanfaat dari penelitian ini antara lain:

1. Memberikan informasi tentang pengaruh penggunaan *repellent* dan intervensi *fogging* terhadap model penyebaran penyakit zika.
2. Mengembangkan model penyebaran penyakit zika yang dapat membantu dalam merumuskan kebijakan pengendalian penyakit yang efektif.

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

Untuk memahami dan menyelesaikan masalah yang dibahas dalam Tugas Akhir ini, bab ini akan mencangkup pemodelan matematika, persamaan dan sistem persamaan diferensial, nilai eigen dan vektor eigen, linearisasi, matriks Jacobian, kriteria *Routh-Hurwitz*, analisis kestabilan titik kesetimbangan, bilangan reproduksi dasar, serta penyakit virus zika.

2.1 Pemodelan Matematika

Pemodelan matematika adalah suatu penyusunan deskripsi dengan perilaku dunia nyata (fenomena alam) dalam bagian matematika yang dikenal dengan dunia matematika, terdapat dua jenis model matematika, yaitu model deterministik dan model empiris. Model deterministik adalah model matematika yang didasarkan pada hukum atau sifat yang berlaku pada sistem. Adapun pada pemodelan empiris adalah ilmu observasional dan hasil tidak bersifat spekulatif. (Jusrawati, 2018).

Berikut ada beberapa langkah dalam pemodelan matematika

1. Masalah dunia nyata

   Langkah dalam pemodelan matematika yang pertama adalah menentukan masalah, nyata dan membutuhkan penetapan suatu tujuan yang akan menjadi bahan pembahasan.

2. Masalah dalam matematika

   Kemudian masalah yang akan dirumuskan yakni bentuk dalam menemukan masalah nyata dengan membuat variabel yang digunakan dalam langkah pemahaman dasar pemodelan matematika.

3. Membuat asumsi

   Pada bagian asumsi yang telah diterapkan dapat merumuskan suatu model matematika dimana model matematika ini akan diselesaikan dengan memenuhi asumsi pada langkah sebelumnya.

4. Mengalisis model

   Selanjutnya pada bagian ini model biasanya merupakan abstraksi dari masalah yang disederhanakan, sehingga hasilnya mungkin berbeda dengan kenyataan yang diperoleh. untuk itu yang akan digunakan pada solusi model matematika ini, yakni dapat dilakukan dengan cara menganalisis sejauh mana model dapat memadai untuk menentukan masalah yang telah dihadapi.

5. Interpretasi hasil.

Temuan dari model matematika dapat dihubungkan Kembali ke proses identifikasi masalah setelah solusi model ditemukan. Interpretasi hasil dengan Solusi yang telah diperoleh, model ini dapat selesai diuji.

2.2 Nilai Eigen Dan Vektor Eigen

Nilai eigen digunakan untuk mengetahui kestabilan dari suatu sistem persamaan diferensial. Berikut definisi dari nilai eigen dan vektor eigen.

Definisi 2.2.1 (Yuliani dkk, 2016)

Misalkan A adalah matriks, berukuran $n \times n$ dengan etri-entri bilangan real ,maka vektor tak nol $\vec{X}$ didalam $\mathbb{R}^n$ dinamakan vektor eigen *(eigenvector)* dari A jika $A\vec{X}$ adalah kelipatan skalar dari $\vec{X}$ yaitu $A\vec{X} = \lambda\vec{X}$ untuk suatu skalar λ. Skalar λ dinamakan nilai eigen dari A dan $\vec{X}$ dikatakan vektor eigen yang bersesuaian dengan λ.

Untuk mencari nilai-nilai eigen Matriks A yang berukuran $n \times n$ maka dapat dituliskan Kembali $A\vec{X} = \lambda\vec{X}$ sebagai

$$\begin{aligned} A\vec{X} &= \lambda\vec{X} \\ A\vec{X} &= \lambda I\vec{X} \\ (\lambda I - A)\vec{X} &= 0 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Agar λ menjadi nilai eigen maka haruslah ada solusi tak nol dari persamaan (2.1) dengan I adalah matriks identitas.

Teorema 2.3.1 (Anton H., 2010)

Jika A adalah matriks berukuran $n \times n$ dengan entri-entri bilangan real, maka λ adalah nilai eigen dari A jika dan hanya jika memenuhi persaman

$$|\lambda I - A| = 0 \tag{2.2}$$

Yang disebut persamaan karakteristik dari A.

Contoh 2.2.1

Tentukan nilai eigen dan vektor eigen dari matriks $A=\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -8 & -1 \end{bmatrix}$

a.) Menentukan nilai-nilai eigen $\det(\lambda I - A) = 0$

$$\lambda I - A = \lambda\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -8 & -1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -8 & -1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \lambda-3 & 0 \\ 8 & \lambda+1 \end{bmatrix}$$

$\det(\lambda I - A) = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} \lambda-3 & 0 \\ 8 & \lambda+1 \end{vmatrix} = 0$

$\rightarrow (\lambda-3)(\lambda+1) = 0 \rightarrow$ persamaan karakteristik

$\rightarrow \lambda - 3 = 0$ atau $(\lambda+1) = 0$

$\lambda = 3$ λ= -1

Jadi nilai-nilai eigen dari matriks A adalah $\lambda = 3$ dan $\lambda = -1$.

b.) Menentukan vektor eigen

$$(\lambda I - A)x = 0 \rightarrow \begin{bmatrix} \lambda-3 & 0 \\ 8 & \lambda+1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Untuk

$$\lambda = 3 \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow 8x_1 + 4x_2 = 0 \rightarrow 8x_1 = -4x_2 \rightarrow x_1 = \frac{-1}{2}x_2$$

$\rightarrow$ solusi : $x_1 = \frac{-1}{2}t, x_2 = t, t \in \mathbb{R}$

vektor eigen : $x=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{2}t \\ t \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} \frac{-1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow$ membentuk ruang eigen (*eigenspace*)

jadi, $\begin{bmatrix} \frac{-1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$ adalah basis untuk ruang eigen dengan λ=3

Ruang eigen ditulis sebagai E(3)= $\left\{ X = t\begin{bmatrix} \frac{-1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}$

untuk λ= -1 $\rightarrow \begin{bmatrix} \lambda-3 & 0 \\ 8 & \lambda+1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Selesaikan dengan eliminasi Gauss:

$$\begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 \end{bmatrix} -\frac{1}{4}b1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 \end{bmatrix} b2-8b1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\rightarrow$ Solusi : $x_1 = 0, x_2 = t, t \in \mathbb{R}$

vektor-vektor eigen : x = $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ t \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow$ membentuk ruang eigen (*eigenspace*)

Jadi, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ adalah basis untuk ruang eigen dengan λ= -1

Ruang eigen ditulis sebagai E$(-1) = \left\{ x = t\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.t \in \mathbb{R} \right\}$

2.3 Persamaan Diferensial

Definisi 2.3.1 (Toaha Syamsuddin, 2013).

Persamaan diferensial adalah persamaan yang melibatkan turunan dari satu atau lebih variabel tak bebas terhadap satu atau lebih variabel bebas.

Berdasarkan banyaknya variabel bebas yang terlibat, Persamaan diferensial diklasifikasikan menjadi dua yaitu persamaan diferensial biasa dan persamaan diferensial parsial. Berikut ini merupakan definisi dari persamaan diferensial biasa.

Definisi 2.3.2 (Toaha Syamsuddin, 2013).

Persamaan diferensial biasa adalah suatu persamaan diferensial yang melibatkan turunan dari satu atau lebih variabel tak bebas terhadap satu variabel bebas.

Berdasarkan sifat kelinearannya, Persamaan diferensial biasa dapat dibedakan menjadi persamaan diferensial biasa linear dan persamaan diferensial biasa nonlinear.

Persamaan diferensial biasa linear memiliki bentuk umum:

$$a_n(t)\frac{d^n x}{dt^n}+a_{n-1}(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_2(t)\frac{d^2x}{d^2t}+a_1(t)\frac{dx}{dt}+a_0(t)\,x=f(t) \qquad (2.3)$$

Jika $f(t)$ bernilai nol untuk semua nilai t dalam interval yang ditinjau, maka persamaan ini dikatakan homogen, sebaliknya dikatakan nonhomogen.

Contoh 2.3.1

Tentukan Solusi persamaan diferensial biasa berikut ini:

$$\frac{dx}{dt}=3t^2-6t+5$$

Penyeselesaian:

$$\frac{dx}{dt}=3t^2-6t+5$$

$$dx=\left(3t^2-6t+5\right)dt$$

$$\int dx=\int\left(3t^2-6t+5\right)dt$$

$$x=\frac{3}{3}t^3-\frac{6}{2}t^2+5t+c$$

$$x=t^3-3t^2+5t+c$$

Definisi 2.3.3 (Saputri R., 2017)

Persamaan diferensial parsial yaitu suatu persamaan diferensial yang melibatkan turunan dari satu atau lebih variabel tak bebas terhadap dua atau lebih variabel bebas.

Definisi 2.3.4 (Evans., 2022)

Diberikan fungsi $u:U\to\mathbb{R}$ dengan $U\subset\mathbb{R}^n$.Himpunan semua turunan parsial orde k dari u adalah $D^k u(x):=\left\{D^a u(x)\|\alpha|=k\right\}$,dengan $k\in\mathbb{Z}^+$.

Definisi 2.3.5 (Evans., 2022)

Diberikan fungsi $F:\mathbb{R}^{n^k}\times\mathbb{R}^{n^{k-1}}\times\cdots\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}\times U\to\mathbb{R}$ dengan $U\subset\mathbb{R}^n$.

Sebuah ekspresi dari bentuk

$$F\left(D^k u(x),D^{k-1}u(x)\cdots,Du(x),u(x),x\right)=0\ \left(x\in U\right) \qquad (2.4)$$

Disebut persamaan diferensial parsial orde k dengan $k \in \mathbb{Z}^{+}$.

Contoh 2.3.2

Tentukan solusi PD berikut : $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - x^2 y = 0$

penyelesaian :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = x^2 y$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial z}{\partial y}\right] = x^2 y \qquad \rightarrow \text{integralkan terhadap x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{3}x^3 y^2 + F(y) \quad \rightarrow \text{integralkan terhadap y}$$

$$\text{z} = \frac{1}{3}x^3 \frac{1}{2}y^2 + \int F(y)dy + G(x)$$

$$z = \frac{1}{3}x^3 \frac{1}{2}y^2 + \int F(y)dy + G(x)$$

$$z = \frac{1}{6}x^3 y^2 + \int F(y)dy + G(x)$$

2.4 Sistem Persamaan Diferensial

Secara umum suatu sistem persamaan diferensial orde pertama berdimensi n mempunyai bentuk berikut:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{aligned} \tag{2.5}$$

dengan $x_1, x_2, \ldots, x_n$ adalah variabel bebas dan t adalah variabel terikat,sehingga $x_1 = x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n = x_n(t)$, Dimana $\frac{dx_n}{dx}$ merupakan derivatif fungsi x_n terhadap t, dan f_n adalah fungsi yang bergantung pada variabel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dan t (Kaya, K., et al, 2021).

Sistem persamaan diferensial berdimensi n adalah gabungan dari n buah persamaan diferensial dengan n buah fungsi tak diketahui dengan $n \geq 2$. Sistem persamaan diferensial juga dibedakan menjadi sistem persamaan diferensial linear dan sistem persamaan diferensial tak linear (Intan Juliah, 2015).

Contoh 2.4.1

Tentukan penyelesaian dari sistem di bawah ini:

$$\frac{dx}{dt} = 2x - 2y$$

$$\frac{dy}{dt} = x - y$$

Penyelesaian:

$$\Rightarrow \frac{dy}{dt} = x - y$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{dy}{dt} + y$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = 2x - 2y$$

$$\Leftrightarrow \frac{d\left(\frac{dy}{dt} + y\right)}{dt} = 2\left(\frac{dy}{dt} + y\right) - 2y$$

$$\Leftrightarrow \frac{d\left(\frac{dy}{dt} + y\right)}{dt} = \frac{2dt}{dt} + 2y - 2y$$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow m^2 - m = 0$$

$$m(m-1) = 0$$

$$m = 0 \text{ atau } (m-1) = 0$$

$$m=1$$

$$\Rightarrow y = c_1e^t + c_2$$

$$\Rightarrow x = \frac{dy}{dt} + y = \frac{d\left(c_1e^t + c_2\right)}{dt} + c_1e^t + c_2 = 2c_1e^t + c_2$$

$$x = 2c_1e^t + c_2$$

$$y = c_1e^t + c_2 \ , \ \mathrm{c}_1, c_2 \in R$$

$\Rightarrow$ jadi penyeselesaian sistem PD tersebut adalah

$x = 2c_1e^t + c_2$

$y = c_1e^t + c_2$, $c_1, c_2 \in R$

2.5 Sistem Persamaan Diferensial Linear

Bentuk umum sistem persamaan diferensial linear sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \dots + a_{1n}(t)x_n + f_1(t) \\
\frac{dx_2}{dt} &= a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \dots + a_{2n}(t)x_n + f_2(t) \\
&\vdots \\
\frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \dots + a_{nn}(t)x_n + f_n(t)
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Sistem persamaan diferensial linear dengan berdimensi dua, berbentuk:

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + f_1(t) \\
\frac{dx_2}{dt} &= a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + f_1(t)
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Dimana fungsi f_1 dan f_2 merupakan fungsi t yang kontinu pada suatu selang I , sedangkan x_1 dan x_2 adalah fungsi yang tak diketahui (Candra, 2010).

2.6 Sistem Persamaan Diferensial Nonlinear

Bentuk umum sistem persamaan diferensial otonomus adalah

$$\frac{d\vec{X}}{dt} = \vec{f}(\vec{X}) \tag{2.8}$$

Dengan $\vec{f}$: E $\rightarrow \mathbb{R}^n$ dan $E \subset \mathbb{R}^n$ (Perko, L., 2001).

Pada persamaan diferensial dikatakan nonlinear jika persamaan diferensial tersebut memenuhi paling sedikit satu dari tiga kriteria berikut (Intan Juliah, 2015):

a.) Memuat variabel tak bebas dari turunan-turunannya yang berpangkat selain satu.

b.) Terdapat perkalian variabel tak bebas dan/atau turunan-turunannya.

c.) Terdapat fungsi transendental dari variabel tak bebas dan turunan-turunannya.

2.7 Linearisasi

Linearisasi merupakan proses mengubah sistem persamaan diferensial nonlinear menjadi sistem persamaan diferensial linear. Linearisasi suatu sistem persamaan diferensial nonlinear dilakukan untuk mengetahui perilaku sistem disekitar titik kesetimbangan sistem. Syarat linearisasi adalah bahwa real akar karakteristiknya tidak nol. Linearisasi dapat dilakukan dengan menggunakan matriks Jacobian. (Ni'mah., & Savitri., 2022)

Definisi 2.7.1 (Olsder & Woude, 2004)

(i) Titik kesetimbangan $\vec{X}*$ dikatakan stabil jika untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $\delta(\varepsilon) > 0,$ sedemikian sehingga jika $\left\|\vec{X_0} - \vec{X}*\right\| < \delta,$ maka $\left\|\vec{X}\left(t, \vec{X}_0\right) - \vec{X}*\right\| < \varepsilon.$

(ii) Titik kesetimbangan $\vec{X}*$ dikatakan stabil asimtomatik jika titik kesetimbangan $\vec{X}*$ stabil terdapat $\delta_1 > 0$ sedemikian sehingga $\lim_{x\to\infty}\left\|\vec{X}\left(t, \vec{X}_0\right) - \vec{X}*\right\| = 0$ asalkan $\left\|\vec{X}_0 - \vec{X}*\right\| < \delta_1.$

(iii) Titik kestabilan dikatakan titik stabil jika titik kesetimbangan tidak memenuhi poin (i).

Defenisi 2.7.2 (Kocak, H., dan Hale, J.k., 1991)

Diberikan $\frac{d\vec{X}}{dt} = \vec{f}\left(\vec{X}\right), \vec{X} \in \mathbb{R}^n$ dengan $\vec{f} = \left(f_1, f_2, \ldots, f_2\right)$ dengan $\vec{f} \in C\left(E\right)$

, dan titik $\vec{X}* \in \mathbb{R}^n$ merupakan titik ekulibrium dari fungsi $\vec{f} = \left(f_1, f_2, \ldots, f_n\right).$

$$J\left(\vec{f}(\vec{X}*)\right) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1\left(\vec{X}*\right)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1\left(\vec{X}*\right)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1\left(\vec{X}*\right)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2\left(\vec{X}*\right)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2\left(\vec{X}*\right)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2\left(\vec{X}*\right)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n\left(\vec{X}*\right)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n\left(\vec{X}*\right)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n\left(\vec{X}*\right)}{\partial x_n} \end{bmatrix} \tag{2.9}$$

Matriks jacobian (2.9) adalah matriks jacobian dari fungsi $\vec{f} = (f_1, f_2, \cdots, f_n)$ di titik $\vec{X}*$.

Definisi 2.7.3 (Perko, L., 2001)

Diberikan matriks Jacobian $J\left(\vec{f}\ \left(\vec{X}*\right)\right)$. Sistem linear

$$\vec{Y} = J\left(\vec{f}\ \left(\vec{X}*\right)\right)\vec{Y}$$

Disebut linearisasi sistem nonlinear $\frac{d\vec{X}}{dt} = \vec{f}\left(\vec{X}\right)$ disekitar titik $\vec{X}*$.

Berikut teorema kriteria kestabilan titik kesetimbangan

Teorema 2.7.1

Misalkan titik $\vec{X}* \in \mathbb{R}^n$ adalah titik kesetimbangan $\frac{d\vec{X}}{dt} = \vec{f}\left(\vec{X}\right)$,

1. Jika bagian real semua nilai eigen $J\left(\vec{f}\left(\vec{X}*\right)\right)$ negatif, maka titik $\vec{X}* \in \mathbb{R}^n$ stabil asimtotik.
2. Jika terdapat nilai eigen dari $J\left(\vec{f}\left(\vec{X}*\right)\right)$ dengan bagian real positif, maka $\vec{X}*$ tidak stabil.

2.8 Aturan Tanda Descartes

Definisi 2.8.1. (Wang ,2004)

Misal tanda negatif $(-)$ adalah polinomial derajat n dengan koefisien real a_i, dan b_i adalah bilangan bulat yang memenuhi $0 \leq\ \mathrm{b}_0 < \mathrm{b}_1 < \cdots < b_n$.

1. banyaknya akar-akar positif $p(x)$ sama dengan banyaknya perubahan tanda pada $p(x)$ atau banyaknya variasi tanda dikurangi dengan bilangan genap.
2. Banyaknya akar-akar negatif $p(x)$ sama dengan banyaknya perubahan tanda pada $p(-x)$ atau banyaknya variasi tanda dikurangi dengan bilangan genap.

Jumlah variasi tanda *(the number of variations in sign)* adalah jumlah bergantinya tanda positif $(+)$ dan negatif $(-)$ pada suku-suku yang berurutan pada polinomial.

2.9 Kriteria Routh-Hurwitz

Kriteria Routh-Hurwitz adalah suatu metode yang digunakan untuk menunjukkan kestabilan sistem dengan memperhatikan koefisien dari persamaan karakteristik tanpa menghitung akar-akar secara langsung. Jika persamaan polinomial adalah persamaan karakteristik, maka metode ini dapat digunakan untuk menentukan kestabilan dari suatu sistem.

Persamaan polinomial orde n ditulis dalam bentuk:

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \cdots + a_{n-1} + a_n = 0 \qquad (2.10)$$

Dengan koefisien-koefisien yang besaran nyata $a_0 \neq 0$.

Tabel *Routh-Hurwitz* yang bersesuaian untuk polinomial (2.10) adalah

Tabel 2.1 *Routh-Hurwitz* untuk polinom (2.10)

Variabel	Koefisien					
λ^n	a_0	a_2	a_4	a_6	$\cdots$	a_{n-1}
λ^{n-1}	a_1	a_3	a_5	a_7	$\ldots$	a_n
λ^{n-2}	b_1	b_2	b_3	b_4	$\ldots$	b_n
λ^{n-3}	c_1	c_2	c_3	c_4	$\cdots$	c_n
$\vdots$		$\vdots$			$\vdots$	
λ^2			e_1	e_2		
λ^1				f_1		
λ^0				g_1		

Dengan koefisien-koefisien:

$$b_1 = \frac{a_1a_2 - a_0a_3}{a_1}, b_2 = \frac{a_1a_4 - a_0a_5}{a_1}, \cdots, b_n = \frac{a_1a_{2n} - a_0a_{2n+1}}{a_1}$$

$$c_1 = \frac{b_1a_3 - a_1b_2}{b_1}, c_2 = \frac{b_1a_5 - a_1b_3}{b_1}, \cdots, c_n = \frac{b_1a_{2n+1} - a_1b_{n+1}}{b_1}$$

a) Banyaknya akar tak stabil dapat dilihat dari banyaknya perubahan tanda pada kolom pertama Tabel *Routh-Hurwitz*.

b) Syarat perlu untuk stabil adalah semua suku pada kolom pertama Tabel *Routh-Hurwitz* bertanda sama

2.10 Bilangan Reproduksi Dasar

Bilangan reproduksi dasar *(Basic Reproduction Number)* merupakan rata-rata individu rentan hingga menjadi infeksius akibat oleh satu individu infeksius selama masa infeksi. Bilangan reproduksi dasar dapat ditentukan dengan menggunakan persamaan yang hanya mengandung infeksi.

Metode *Next Generation Matrix* (NGM) merupakan metode yang digunakan untuk menentukan bilangan reproduksi dasar. Pada metode *next generation matrix*, R_0 didefinisikan sebagai nilai eigen terbesar dari next generation matriks. Prosedur dalam menentukan R_0 adalah sebagai berikut:

a) Diberikan model epidemi yang terdiri dari n yaitu

$$\frac{dX_i}{dt} = f_i\left(\vec{X};\mu\right) \tag{2.11}$$

Dengan $i = 1, 2, \cdots, n$

b) kompartemen disusun sehingga $m \leq n$ kompartemen pertama adalah kompartemen penyakit (terinfeksi, terekspons, virus parasit, bakteri).

c) Berdasarkan (a) dan (b), diperoleh $\mathrm{g}\left(\vec{X};\mu\right) = F_i\left(\vec{X};\mu\right) - V_i\left(\vec{X};\mu\right)$ dengan $V_i\left(\vec{X};\mu\right) = V_i^-\left(\vec{X};\mu\right) - V_i^+\left(\vec{X};\mu\right)$ untuk $i = 1, 2, \cdots, m.$

F_i merepresentasikan bagian infeksi baru, V_i^+ menyatakan bagian transisi individu ke kompartemen i, V_i^- merupakan bagian transisi individu keluar dari kompartemen $i.$

d) Misalkan $\vec{X}^*$ adalah titik kesetimbangan bebas penyakit sistem (2.11) maka $F = \left|\frac{\partial F_i}{\partial X_j}\left(\vec{X}^*;\mu\right)\right|$ dan $V = \left|\frac{\partial V_i}{\partial X_j}\left(\vec{X}^*;\mu\right)\right|$ dengan $1 \leq i, j \leq m.$

e) $R_0 = \rho\left(FV^{-1}\right)$ dengan $\rho\left(FV^{-1}\right)$ adalah spektral radius atau nilai eigen dominan matriks $\rho\left(FV^{-1}\right)$. Matriks FV^{-1} merupakan matriks generasi selanjutnya (Nur W., 2023).

Teorema 2.10.1 (Driessche, den, Van, P, 2017)

Jika $\vec{X}_0$ adalah titik kesetimbangan bebas penyakit dari sistem $\frac{dX_i}{dt} = F_i(X) - V_i(X)$ maka $\vec{X}_0$ stabil asimtotik lokal Jika $R_0 < 1$ dan titik stabil jika $R_0 > 1$.

2.11 Penyebaran Virus Zika

Virus zika, yang disebabkan oleh nyamuk Aedes, adalah virus *flavivirus* yang ditularkan melalui *arthropoda (arbovivirus)* (Musso, & Gubler, 2016). Zika awalnya ditemukan di Tanzania dan Uganda pada tahun 1954, tetapi sejak itu, virus ini telah menyebar ke seluruh dunia. Beberapa tahun kemudian, virus ini juga masuk ke Indonesia. Nyamuk dan transfusi darah merupakan vektor utama penularan virus Zika dari orang ke orang. Bukti adanya virus Zika dalam air mani manusia menunjukkan bahwa hubungan seksual merupakan vektor potensial penularan virus (Foy, et al. 2011). Penyakit menular seksual dilaporkan juga terjadi, sementara yang lain berpendapat bahwa pria dan wanita tertular penyakit ini pada tingkat yang berbeda. pada tahun 2016, Deckard et al. Mengenai data yang berkaitan dengan potogenesis virus zika, telah ditemukan 80% individu yang terinfeksi tidak menunjukkan gejala atau gejala yang sangat ringan, sekitar 20-25% pasien yang terinfeksi mengalami ruam kulit, demam, nyeri sendi, dan mata merah (Musso, & Gubler, 2016). Sejumlah penelitian sebelumnya telah menunjukkan bahwa infeksi yang didapat selama kehamilan dapat menyebabkan berbagai komplikasi, termasuk mikrosefali kongenital, kelainan otak, Sindrom Guillain Barre, lahir mati, dan aborsi (Song, et al. 2017; Rasmussen, et al. 2016). Glaukoma dan penyakit neurologis lainnya terkait dengan virus ini, yang meningkatkan tekanan intraokular dan merusak saraf optik (Adebayo, et al. 2017). Meskipun para peneliti telah membuat langkah signifikan dalam mengembangkan terapi yang efektif untuk infeksi virus zika, belum ada hasil yang memuaskan yang dicapai sejauh ini, dan saat ini, belum ada obat antivirus yang telah diizinkan secara khusus untuk pengobatan infeksi virus zika (Baz, & Boivin 2019). Istirahat yang cukup dan menghindari gigitan nyamuk aedes aegypti, yang dapat menghasilkan virus zika, adalah satu-satunya pengobatan.

DAFTAR PUSTAKA

Adebayo, G., Neumark, Y., Gesser-Edelsburg, A., Ahmad, W. A., & Levine, H. (2017). Zika pandemic online trends, incidence and health risk communication: a time trend study. *BMJ global health*, *2*(3), e000296.

Aldila, D., Rasyiqah, K., Ardaneswari, G., & Tasman, H. (2021, March). A mathematical model of zika disease by considering transition from the asymptomatic to symptomatic phase. In *Journal of Physics: Conference Series* (Vol. 1821, No. 1, p. 012001). IOP Publishing.

Anton, H. (2010). Elementary Linear Algebra (10th ed.). Wiley.

Baz, M., & Boivin, G. (2019). Antiviral agents in development for Zika virus infections. *Pharmaceuticals, 12*(3), 101.

Biswas, S. K., Ghosh, U., & Sarkar, S. (2020). Mathematical model of zika virus dynamics with vector control and sensitivity analysis. Infectious Disease Modelling, 5, 23-41.

Candra M., 2010, Analisis Kestabilan Titik Kesetimbangan Model Matematika Proses Transmisi Virus Dengue di dalam Tubuh Manusia dengan Terapi Obat Herbal, Vol.2. No. 2,110-119.

Deckard, D. T., Chung, W. M., Brooks, J. T., Smith, J. C., Woldai, S., Hennessey, M., ... & Mead, P. (2016). Male-to-male sexual transmission of Zika virus—Texas, January 2016. *Morbidity and Mortality Weekly Report*, *65*(14), 372-374.

Driessche, den, van, P. ,. 2017, Reproduction numbers of infectious disease models. Infectious disease modelling, KeAi Advancing Reseach Evolving Science. Vol. 2. https://doi.org/10.1016/j.idm.2017.06.002.

Evans, L. C., 2022. Partial differential equations (Vol. 19). American Mathematical Society.

Foy, B. D., Kobylinski, K. C., Foy, J. L. C., Blitvich, B. J., da Rosa, A. T., Haddow, A. D., ... & Tesh, R. B. (2011). Probable non–vector-borne transmission of Zika virus, Colorado, USA. *Emerging infectious diseases*, *17*(5), 880.

Gabis, L., Gelman-Kohan, Z., & Mogilner, M. (1997). Microcephaly due to fetal brain disruption sequence. Case report. *Journal of perinatal medicine*, *25*(2), 213-215.

Goswami, N. K., Srivastav, A. K., Ghosh, M., & Shanmukha, B. (2018, April). Mathematical modeling of zika virus disease with nonlinear incidence and optimal control. In *Journal of Physics: Conference Series* (Vol. 1000, No. 1, p. 012114). IOP Publishing.

Intan, J., 2015. Analisis Kestabilan Titik Kesetimbangan Model Matematika Proses Transmisi Virus Dengue Di Dalam Tubuh Manusia Dengan Terapi Obat Herbal, Doctoral dissertation, Universitas Negeri Semarang.

Jusrawati. 2018. Pemodelan Matematika Terhadap Kelangsungan Hidup Penderita Diabetes Melitus, Makassar: Universitas Islam Negeri (UIN) Alauddin.

Kaya, K., et al, 2021, Model Matematika pada Penyakit Diabetes Melitus dengan Faktor Genetik dan Faktor Sosial, Journal of Mathematics: Theory andApplications, Vol. 3, No. 1. https://ojs.unsulbar.ac.id/index. php/Mathematics/article/view/1366/731.

Kocak, H., & Hale, J.K. 1991. Dynamical and Bifurcation. New York: SpringerVerlag.

Lee, E. K., Liu, Y., & Pietz, F. H. (2016). A compartmental model for Zika virus with dynamic human and vector populations. In AMIA Annual Symposium Proceedings (Vol. 2016, p. 743). American Medical Informatics Association.

Musso, D., & Gubler, D. J. (2016). Zika virus. *Clinical microbiology reviews*, *29*(3), 487-524.

Ni’mah, F., & Savitri, D., 2022, Analisis kestabilan model eko-epidemiologi dengan fungsi respon holling tipe I, Jurnal Ilmiah Matematika, Vol.10. No.1.https://www.semanticscholar.org/reader/7bfbdb6d4ed64b26818556 520dd829a34bd71a.

Nur, W. 2023. Kajian Penyebaran dan Pengendalian Penyakit Schistosomiasis dengan Model Matematika, Disertasi, Program Studi Doktor Matematika, Univ. Brawijaya, Malang.

Olsder, G.J. & Woude, J.W, van der, 2004, Mathematical System Theory, Netherland: VVSD.

Organisasi Kesehatan Dunia 2018 Virus Zika https://www.who.int/news-room/fact-sheets/detail/zika-virus

Padmanabhan, P., Seshaiyer P. and Castillo-Chavez C. 2017. Mathematical modeling, analysis and simulation of the spread of zika with influence of sexual transmission and preventive measures Letters in Biomathematics, 4(1).

Perko, L. 2001. Differential Equation and Dynamical System. Springer-Verlag Berlin Heidelberg: New York.

Perko, L., & Perko, L., 2001. Nonlinear systems: Global theory. Differential Equations and Dynamical Systems, 181-314.

Rasmussen, S. A., Jamieson, D. J., Honein, M. A., & Petersen, L. R. 2016. Zika Virus and Birth Defects — Reviewing the Evidence for Causality. New England Journal of Medicine, 374(20):1981-1987.

Rezapour, S., Mohammadi, H., & Jajarmi, A. 2020. A new mathematical model for Zika virus transmission. *Advances in difference equations*, *2020*(1), 1-15.

Saputri, R., 2017. Solusi numerik model matematika glukosa, insulin, dan sel beta pada penyakit diabetes mellitus menggunakan metode newton, Doctoral dissertation, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.

Song, B. H., Yun, S. I., Woolley, M., & Lee, Y. M. (2017). Zika virus: History, epidemiology, transmission, and clinical presentation. *Journal of neuroimmunology*, *308*, 50-64.

Toaha, S., 2013. Analisis Kestabilan Dan Keuntungan Maksimal Pada Model Pertumbuhan Populasi Mangsa-Pemangsa Dengan Tahapan Struktur. In Prosiding Seminar Nasional Matematika, Sains, dan Teknologi.

Wang, X, (2004), A Simple Proof of Descartes's Rule of Sign, JSTOR, 111: 525-526.

WHO Fact sheet No. 117, 2009: Dengue and dengue haemorrhagic fever

Yuliani, S., Retno, S. R., & Binatari, N., 2016. Analisis penyebaran penyakit diare sebagai salah satu penyebab kematian pada balita menggunakan model matematika SIS (Susceptible-Infected-Susceptible. S1 thesis, Universitas Negeri Yogyakarta (UNY).